１．６　スカラー及びベクトルの経路依存積分

積分変数の数が被積分関数中の変数の数に等しいとき、積分を視覚化するのは容易である。例えば次の積分はそれぞれスカラー定数、スカラー定数、ベクトル定数を与える。

$$\int_a^b f(x)dx\,,\qquad \int_{volume-\Omega}\phi(x,y,z)dxdydz\,,\qquad \int_{volume-\Omega}\mathbf{V}(x,y,z)dxdydz$$

積分変数の数が被積分関数中の変数の数より少ない場合でも、積分を定義することはできる。しかし状況はより複雑である。例えば次の積分

$$I_c=\int_{(x1,y1)}^{(x2,y2)}\phi(x,y)dx$$

について、$\phi(x,y)$中の変数yが不明であるため、これは不完全な定義である。付け加えるべき条件式は、以下のようになる。

$$y=y_c(x)\qquad (1.\ 62)$$

すなわちyをxの関数として指定する。結果、被積分関数は

$$\phi(x,y_c(x))=f_c(x)$$

と置き換わる。よってこの積分は、完全に定義された状態になる。

$$\int_{x1}^{x2}f_c(x)dx=\int_c\phi(x,y)dx\qquad (1.\ 63\ \mathrm{a})$$

ここでcは式（1．62）によって規定される。

条件式（1．62）は、xy平面上の開始点(x_1,y_1)と終了点(x_2,y_2)を結ぶ経路cを表す。式（1．63 a）のxに関する積分は、この経路に沿って実行される。この理由からI_cを経路依存積分、あるいは単純に経路積分とよぶ。xy平面上の終了点はそのままで経路を変更した場合、$f_c(x)$およびI_cの両方ともその影響を被るであろうことは、上述の定義より明らかである。

例題 1．6．1　　積分$\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left(x^2+y^2\right)dx$を、直線（経路１）に沿って積分せよ。また半径１の円弧（経路２）に沿って積分せよ（図 1．6 参照）。

経路１：$y=x$ ，$I_1=\int_0^1 2x^2dx=\dfrac{2}{3}$ ．

経路２：$\left(x-1\right)^2+y^2=1$ ，

$$I_2=\int_0^1\left\{x^2+\left[1-\left(x-1\right)^2\right]\right\}dx=\int_0^1 2xdx=1\neq I_1 \quad .$$

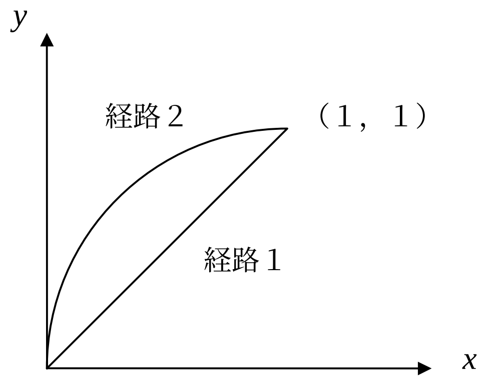

図 1．6　経路積分における、異なる経路

同様の考え方で、空間内のスカラー場に関する線積分

$$I_c=\int_{(x1,y1,z1)}^{(x2,y2,z2)}\phi\left(x,y,z\right)dx \qquad (1.\ 63\ \mathrm{b})$$

は、３次元空間内の経路cに沿う１次元的な積分といえる。この積分はある１つの数値を与える。なぜなら経路 c に沿って $y=y_c\left(x\right)$， $z=z_c\left(x\right)$ であり、すなわち $\phi\left(x,y_c\left(x\right),z_c\left(x\right)\right)=f_c\left(x\right)$となるからである。

例題 1．6．2　　線積分 $I_c=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}\left(x^2+y^2+z^2\right)dx$ は、次に示す経路のどれに沿って積分するかで、異なる結果を与える：

（１）$\left(0,0,0\right)$と$\left(1,1,1\right)$を結ぶ直線に沿って積分する。このとき$y=x$および$z=x$である。ゆえに

$$I_c=\int_0^1 3x^2dx=1 \quad .$$

（２）立方体の３辺α：$(0,0,0)\to(1,0,0)$，β：$(1,0,0)\to(1,1,0)$，γ：$(1,1,0)\to(1,1,1)$に沿って積分する。この結果は$I_c = I_\alpha + I_\beta + I_\gamma = 1/3$となる。なぜなら

$$I_\alpha = \int_0^1 x^2 dx = 1/3 \quad ,$$

$$I_\beta = \int_{(1,0,0)}^{(1,1,0)} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dx = 0 \quad ,$$

$$I_\gamma = \int_{(1,1,0)}^{(1,1,1)} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dx = 0 \quad .$$

上述の議論は、２次元の積分に対しても適用できる。

$$I = \iint \phi(x,y,z)\,dxdy$$

空間内のスカラー場に関するこの積分は、面Sが$z = z_S(x,y)$のように定義されない限り、固有の数値を導くことができない。z_Sが既知であれば、被積分関数は

$$\phi(x,y,z) = \phi(x,y,z_S(x,y)) = g_S(x,y)$$

となる。この積分の結果、１つの数値を得る。このような積分を、面積分とよぶ。

例題１．６．３　面積分$I_S = \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdy$は、次に示す面のどれに沿って積分するかで、異なる結果を与える：

１．平面$z = 0$上の円$x^2 + y^2 = 1$の、内側の領域に沿って積分：

$$I_S = \iint_{circle} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = 2\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \quad .$$

２．$x^2 + y^2 + z^2 = 1$（ただし$z \geqq 0$）で表される半球面に沿って積分：

$$I_S = \iint_{hemisphere} dxdy = \iint_{circle} dxdy = 2\pi \int_0^1 \rho d\rho = \pi \quad .$$

（訳注）上記の積分中、x,yに関する積分からρに関する積分へと移行するには、置換積分の方法を用いる。今の場合１．と２．の両方について、以下のように変数および積分範囲を置き換えることができる。

$$\begin{aligned} &x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta \\ &dxdy \to \rho d\rho d\theta \end{aligned} \quad , \quad \text{積分範囲} \ \to\ \rho : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \theta : \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

１.について、これらの関係を適用すると

$$\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \rho^3 d\rho d\theta \quad ,\ \text{ゆえに}$$

$$I_S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho \quad .$$

２.について、これらの関係を適用すると

$$dxdy = \rho d\rho d\theta \quad ,\ \text{ゆえに}$$

$$I_S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho d\rho \quad .$$

◆

線積分において経路を、あるいは面積分において面を指定することが、積分変数に合わせて望ましくない変数を消去する、その規則を与えてくれるものであることを、これまで見てきた。そのような消去あるいは置換といった操作は、概念的にとてもシンプルで基本的なものである。計算の手続きそれ自体、とくに目新しいものではない。しかしこれにスカラー場が関わってくると、結局は面白いものになってくる。なぜなら関係付けられたスカラー場に関する定積分が互いに一致することを示せるからである。これらの厳密な数学的関係を積分定理とよぶ。それらは、空間内のスカラー場及びベクトル場の重要な数学的特性を記述する。

これらの積分定理について学ぶ前に、まず、より複雑な経路依存積分がどのようにして、以前議論した基本的な線積分および面積分から組み立てられるのかを見ておく。

1．6．1　ベクトル線積分

ベクトル線積分とは、積分変数が空間的なベクトル線要素

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$$

である積分のことを言う。線積分は３つのタイプに分類できる。

$$\int_c \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_c \phi dx + \mathbf{j}\int_c \phi dy + \mathbf{k}\int_c \phi dz = \mathbf{a} \quad , \qquad (1.\ 64)$$

$$\int_c \mathbf{V}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_c V_x dx + \int_c V_y dy + \int_c V_z dz = w \quad , \qquad (1.\ 65)$$

$$\int_c \mathbf{V}(\mathbf{r})\times d\mathbf{r} = \int_c \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \mathbf{b} \quad , \qquad (1.\ 66)$$

ここで$\mathbf{b}$に関して、$b_x = \int_c \left(V_y dz - V_z dy\right)$となる（$b_y, b_z$については省略）。これら全ての積分は普通、経路に依存する。また、どの経路に沿って積分しても、スカラー定数かベクトル定数を与える。

1．6．2　ベクトル面積分

閉曲面を横切って流れる流体を記述する場合、閉曲面によって囲まれた領域外への流出量と、領域内への流入量を区別することが重要である。この区別は、面要素$d\sigma$とその方向$\mathbf{n}$を与えてやることで、容易に記述できる。すなわち

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} d\sigma \qquad （1．67）$$

はベクトル微小面要素である。ここで$\mathbf{n}$（あるいは$\mathbf{e}_n$）は面要素に対して垂直あるいは直角になるよう、選ばれるものと約束する。また$d\sigma$が閉曲面の１部分である場合、$\mathbf{n}$は閉曲面内から外へ向かう方向を指し示すものと約束する（訳注：このようなベクトルを法単位ベクトルという）。$d\boldsymbol{\sigma}$はベクトルであり、直交座標系では

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i} d\sigma_x + \mathbf{j} d\sigma_y + \mathbf{k} d\sigma_z \qquad （1．68）$$

と書ける。ここで

$$d\sigma_x = \pm dydz, \quad d\sigma_y = \pm dzdx, \quad d\sigma_z = \pm dxdy$$

である。また符号は、曲面上の与えられた$d\boldsymbol{\sigma}$に合致するよう選ばれる。これを具体的にどう使うかは、式（1．74）のところで説明する。

面積分は３つのタイプに分類できる。

$$\int_S \phi(\mathbf{r}) d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}\int_S \phi d\sigma_x + \mathbf{j}\int_S \phi d\sigma_y + \mathbf{k}\int_S \phi d\sigma_z = \mathbf{A} \qquad , \qquad （1．69）$$

$$\int_S \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_S V_x d\sigma_x + \int_S V_y d\sigma_y + \int_S V_z d\sigma_z = \Phi \qquad , \qquad （1．70）$$

$$\int_S \mathbf{V}(\mathbf{r}) \times d\boldsymbol{\sigma} = \int_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ d\sigma_x & d\sigma_y & d\sigma_z \end{vmatrix} = \mathbf{B} \qquad , \qquad （1．71）$$

ここで$\mathbf{B}$に関して、$B_x = \int_S \left(V_y d\sigma_z - V_z d\sigma_y\right)$となる（$B_y, B_z$については省略）。これらの積分はそれぞれ、被積分関数が２つの積分変数のみの関数になるよう、面Sの指定を要求する。また１つの積分記号Sのみを用いることで、多変数の積分を簡潔に記述している。

例題１．６．４　次式を証明せよ。

$$I = \int_S \mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 2\pi a^3 \quad , \qquad (1.\ 72)$$

ここで S は半径 a の半球面を表す。

半球面上では、経度方向の変位は $ad\theta$ で表され、また緯度方向の変位は $a\sin\theta d\varphi$ で表される。この結果、面要素ベクトルは

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_r a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

となる。それゆえ

$$I = a^3 \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi a^3 \quad .$$

この問題を直交座標系で解くことも、教育上有益であろう。

$$\begin{aligned} I &= \int_S x d\sigma_x + \int_S y d\sigma_y + \int_S z d\sigma_z \\ &= I_x + I_y + I_z \end{aligned} \quad , \qquad (1.\ 73)$$

ここで面 S は次式で定義される。

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (1.\ 74)$$

ここでは半球として北半球を仮定する。図１．７で示すように z 軸は北極点を貫いている。

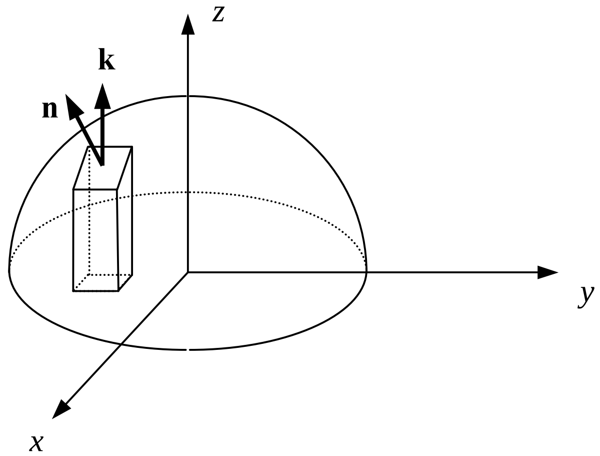

図１．７　半球面上での面積分

さて、北半球では $d\sigma_z = dxdy$ となる。なぜなら $\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}$ は常に正だからである。それゆえ xy 平面内にある半径 a の大円上で積分を行うと、

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int\int\left(a^2 - x^2 - y^2\right)^{1/2} dxdy \\
&= 2\pi\int_0^a \left(a^2 - \rho^2\right)^{1/2} \rho d\rho \\
&= 2\pi a^3/3
\end{aligned}
$$

となる。積分 I_x はより複雑である。なぜなら $dydz$ の積分は、 yz 平面内にある半円上で行われるからである。いま半球面を 2 つの等しい片に分割する。その一方は yz 平面の前方、x 軸の正方向に位置する。ここでは $\mathbf{r}\cdot\mathbf{i}$ は正であり、それゆえ $d\sigma_x = dydz$ となる。残り半分は yz 平面の後方に位置し、 $d\sigma_x = -dydz$ である。ゆえに

$$
\begin{aligned}
I_x &= I_{x+} + I_{x-} \\
&= \int_{front} xdydz - \int_{back} xdydz
\end{aligned}
\qquad (1.\ 75)
$$

いま、半分に分けた各々の領域は、それぞれ同じ結果 $\pi a^3/3$ を与える。よって $I_x = 2\pi a^3/3$ となる。最後の I_y について、これは I_x と同じ方法で計算でき、 $2\pi a^3/3$ を得る。それゆえ面積分の合計は

$$
I = I_x + I_y + I_z = 2\pi a^3
$$

となり、式（1．72）と一致する。

この問題を解く 3 番目の方法は、おそらく最も一般的なものである。この方法で結果として、 xy 平面内の大円上での積分が可能となる。これは、 $d\boldsymbol{\sigma}$ とその xy 平面への射影が、次式で示すように関係付けられていることに起因する。

$$
dxdy = |d\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \quad , \qquad (1.\ 76)
$$

ここで $\mathbf{n}$ は図 1．7 で示すように、球面の法単位ベクトルである。したがって

$$
I = \int \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}|d\boldsymbol{\sigma}| = \int \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\frac{dxdy}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \quad .
$$

法単位ベクトル $\mathbf{n}$ は、半球面の半径を表す式（1．74）の勾配から計算されねばならない。

$$
\nabla r^2 = 2\mathbf{r} \quad , \quad \text{これより} \quad \mathbf{n} = \nabla r^2 / |\nabla r^2| = 2\mathbf{r}/2r = \mathbf{e}_r
$$

よって$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=a$，$\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}=z/a$となり、そして

$$I=a^2\int z^{-1}dxdy$$

となる。xy平面における極座標$\rho=\left(x^2+y^2\right)^{1/2}$及び$\phi$で表せば、上式はより計算しやすくなる。

$$I=a^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^a\left(a^2-\rho^2\right)^{-1/2}\rho d\rho=2\pi a^3 \quad .$$

面積分は、計算したり視覚化したりするのが難しくなりがちである。続く２節では、それを具現化している特定のタイプの面積分を採りあげ、如何にして体積分あるいは線積分とシンプルに関係付けられているかを学ぶ予定である。

本節の残りでは、簡単な幾何学的考察のみで求められるような、幾つかの一般的な面積分を見ていく。

例題１．６．５　次式を証明せよ。

$$\oint_c\mathbf{r}\times d\mathbf{r}=2\int_S d\boldsymbol{\sigma} \quad , \qquad （１．77）$$

ここでcは任意の閉曲線である。（積分記号に重ね書きされた小さな円は、閉曲線に沿って周回積分することを意味する。）またSはcを境界とする任意の平面である。

この問題を解く簡単な方法は、$\mathbf{r}\times d\mathbf{r}$が、$\mathbf{r}$と$d\mathbf{r}$からなる３角形のベクトル面要素$d\boldsymbol{\sigma}$の２倍の面積を与えることに注意することである。境界線cの周回が完了すれば、半径$\mathbf{r}$によって描かれるベクトル面要素の合計が求まる。結果として得る関係（１．77）は、$\mathbf{r}$を測定する座標の原点をどこに採ろうとも、その形を変えない。

少々回りくどい方法――より複雑な状況においても役立つ、図解的な考え方――でこの結果を再考することは、教育上ためになる。まず初めに、平面$z=z_o=Const.$上で矩形の微小閉ループc（図１．８の A→B→C→D→A）を考える。この閉じた経路上での積分は

$$\oint_{\Delta c}\mathbf{r}\times d\mathbf{r}=\oint_{\Delta c}\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x&y&z_o\\dx&dy&0\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}\left(-z_o\right)\oint_{\Delta c}dy+\mathbf{j}z_o\oint_{\Delta c}dx+\mathbf{k}\oint_{\Delta c}\left(xdy-ydx\right) \quad .$$

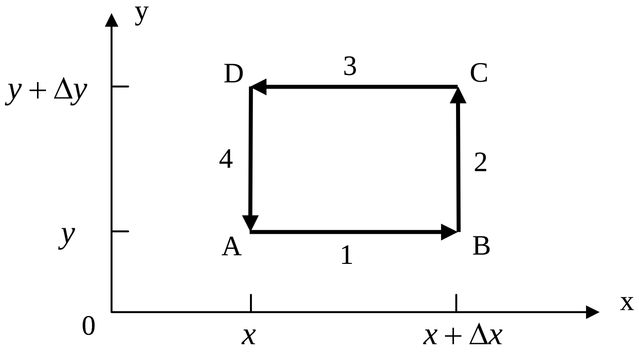

図１．８　矩形の微小閉ループ

はじめの２つの閉経路積分はともにゼロとなる。なぜなら

$$\oint dy = y(final) - y(initial) = 0 \;\;;$$

同様に

$$\oint dx = 0 \;\;.$$

残りの計算について

$$\begin{aligned}\oint_{\Delta c} \mathbf{r}\times d\mathbf{r} &= \mathbf{k}\oint (xdy - ydx) \\ &= \{(-y\Delta x)_1 + [(x+\Delta x)\Delta y]_2 \\ &\quad + [-(y+\Delta y)(-\Delta x)]_3 + [x(-\Delta y)]_4\} \;\;,\end{aligned}$$

ここで添字は、図１．８に印した各辺の寄与を意味する。この手順により

$$\oint_{\Delta c} \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = \mathbf{k}(2\Delta x\Delta y) = 2\mathbf{k}\Delta\sigma_z$$

を得る。平面曲線は空間内で任意の方向に傾いている為、実際にはより一般的な結果が導かれる。

$$\oint_{\Delta c} \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = 2\mathbf{n}\Delta\sigma = 2\Delta\boldsymbol{\sigma} \;\;,$$

ここで $\mathbf{n}$ は、Δc が囲む平面に垂直である。

　次に元の閉曲線 c へ戻り、これを図１．９で示すような矩形の微小閉ループ Δc_i に分割する。隣りあうループの隣接する辺同士では、お互い常に反対方向の積分を含むため、正味の寄与はゼロとなる。その結果、閉ループの外側に露出した辺だけが積分に寄与する。これらの露出した辺を合計すると、ちょうど元の閉曲線 c になる。それゆえ

$$\oint_c \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \sum_i \lim_{\Delta c_i \to 0} \oint_{\Delta c_i} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$
$$= \sum_i \lim_{\Delta \sigma_i \to 0} 2\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = 2\int_S d\boldsymbol{\sigma} \quad .$$

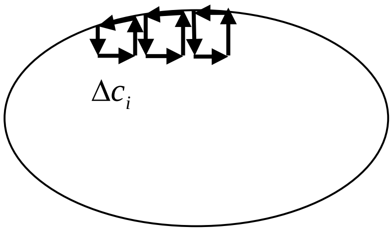

図１．９　閉曲線から矩形の微小閉ループへの分割

どの微小閉ループΔc_iも、無限に小さくするほど平面曲線に近づく――このことは重要である。しかし有限な大きさの閉曲線cは、必ずしも平面曲線であるとは限らない。さらに、境界線cで囲まれた面Sは一意に定義されない。たとえばcが図 1.10 で示すような円の場合、面Sは図 1.10(a)のように円内の平面と考えることもできるし、図 1.10(b)のように球面の一部と考えることもできる。続く例題で見るように、面積分$\int d\boldsymbol{\sigma}$は両方の面について同じ結果を与える。

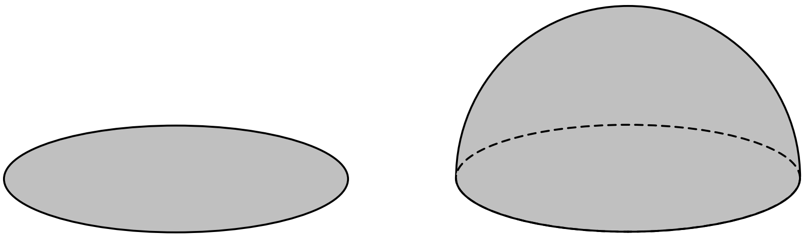

図１．10　同じ境界線で囲まれた２つの異なる面

例題１．６．６　閉曲面上の積分

$$\oint_S d\boldsymbol{\sigma} = 0 \qquad （1．78）$$

を証明せよ。（積分記号に重ね書きされた小さな円は、閉曲面を意味する。）

はじめに、各辺が$\Delta x, \Delta y, \Delta z$である煉瓦状の微小体積要素を考えよう。閉曲面$\Delta S$の６つの辺上で

$$\oint_{\Delta S} d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}(\Delta y \Delta z - \Delta y \Delta z) + \mathbf{j}(\Delta z \Delta x - \Delta z \Delta x) + \mathbf{k}(\Delta x \Delta y - \Delta x \Delta y)$$
$$= 0 \quad ,$$

ここで、煉瓦の手前側の面からの寄与は、向こう側の面からの寄与と正確に打ち消しあう。ただし法線ベクトルは常に体積要素の外側へ向いている。元の閉曲面で囲まれた領域が、このような、閉曲面ΔS_iで囲まれた煉瓦状の微小体積要素に分割されるならば、次式が成立する。

$$\oint_S d\boldsymbol{\sigma} = \sum_i \oint_{\Delta S_i} d\boldsymbol{\sigma} = \sum_i 0 = 0 \quad .$$

例題1．6．7　閉曲線cを境界とする面上での面積分$\int d\boldsymbol{\sigma}$が、$c$を境界とする何れの面上でも同じになる事を証明せよ。

　例えば図1．10で示すような、cを境界とする２つの異なる面S_1とS_2を採りあげる。これら２つの面が一緒になって閉曲面Sを形成するが、法線ベクトルが常に閉領域の外側へ向くよう、一方の面（S_1とする）の法線ベクトルを逆向きにとる。それゆえ次式を得る。

$$\oint_S d\boldsymbol{\sigma} = 0 = -\int_{S1} d\boldsymbol{\sigma} + \int_{S2} d\boldsymbol{\sigma} \quad ,$$

$$※ \quad \int_{S1} d\boldsymbol{\sigma} = \int_{S2} d\boldsymbol{\sigma} \quad .$$

例題1．6．8　次式を証明せよ。

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 3V \quad , \qquad （1．79）$$

ここでVは、閉曲面Sで囲まれた領域を表す。

　煉瓦状の体積要素$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$についての計算から始めよう。

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\Delta S} \left(x d\sigma_x + y d\sigma_y + z d\sigma_z \right) = 3\Delta x \Delta y \Delta z = 3\Delta V \quad ,$$

よって最終結果は、積分計算に関するお決まりの規則から導かれる。

　空間内のベクトル場に関するこれらの積分には２つのスカラー積、式(1.65)と(1.70)が含まれているが、とても重要なため特別な名前が冠せられている。最初の

$$w = \int_c \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad （1．80）$$

は、経路c上でベクトル場$\mathbf{V}(\mathbf{r})$に対してなされる“一般化仕事”とよばれる。この名前の由来は、$\mathbf{V}$が力学的な力$\mathbf{F}(\mathbf{r})$のとき、wは力学的な仕事を表すところから来ている。よく知られている事だが、力学系が保存系であるとき、すなわち

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$$

のようにポテンシャル場$\phi(\mathbf{r})$から力を導出できるとき、wは

$$
\begin{aligned}
w &= \int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_c \nabla\phi(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -\int_c d\phi(\mathbf{r}) \\
&= -[\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)]
\end{aligned}
$$

となる。ここで以前導いた式（1．39）を使用している。これらの状況のもとで、wは端点$\mathbf{r}_1$と$\mathbf{r}_2$のみに依存し、積分経路には依存しない。このことは、空間内の場の積分特性を勉強するうえで、興味をひく数学的帰結といえる例である。

閉経路積分

$$
C = \oint_c \mathbf{V}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \qquad (1.81)
$$

を、閉経路cに沿うベクトル場$\mathbf{V}(\mathbf{r})$の循環（circulation）とよぶ。力学的な保存系では、力場に関する全ての循環はゼロとなる。逆に言えば、ベクトル場に関する全ての循環がゼロとなれば、そのベクトル場は必ずスカラーポテンシャル場の勾配に比例する。式(1.50)によれば、そのようなベクトル場は必ず渦なし場である。また流体力学において、速度場に関する全ての循環がゼロとなるような空間域における流体の流れは、ポテンシャル流あるいは渦なし流とよばれる。

２番目の重要な積分は、式（1．70）で定義されるスカラーΦである。これは、面Sを横切るベクトル場$\mathbf{V}(\mathbf{r})$のフラックス（線束）とよばれる。その物理的な意味は次節で説明する。