## １．５　ベクトル場のベクトル微分演算（解答）

１．５．１

（ａ）について：

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}A_jB_k\right)$$

$$=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_jB_k)=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\left(B_k\frac{\partial}{\partial x_i}A_j+A_j\frac{\partial}{\partial x_i}B_k\right)$$

$$=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}B_k\frac{\partial}{\partial x_i}A_j+\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}A_j\frac{\partial}{\partial x_i}B_k$$

$$=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{kij}B_k\frac{\partial}{\partial x_i}A_j-\sum_{i,j,k}\varepsilon_{jik}A_j\frac{\partial}{\partial x_i}B_k$$

$$=\sum_k B_k\left(\sum_{i,j}\varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j\right)-\sum_j A_j\left(\sum_{i,k}\varepsilon_{jik}\frac{\partial}{\partial x_i}B_k\right)$$

$$=\sum_k B_k(\nabla\times\mathbf{A})_k-\sum_j A_j(\nabla\times\mathbf{B})_j=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

（ｂ）について：

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\times\mathbf{A})_k=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{m,n}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial}{\partial x_m}A_n\right)$$

$$=\sum_{i,j,m,n}\left(\sum_k\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\right)\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}A_n\right)$$

$$=\sum_{i,j,m,n}(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}A_n\right)$$

$$=\sum_{i,j}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}A_j-\frac{\partial}{\partial x_j}A_i\right)=\sum_{i,j}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}A_j-\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}A_i\mathbf{e}_i$$

$$=\left(\sum_i\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}A_j\right)-\left(\sum_j\frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}\right)\left(\sum_i A_i\mathbf{e}_i\right)$$

$$=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

（ｃ）について：

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\sum_{i,j}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_jB_j\right)$$

$$=\sum_{i,j}\mathbf{e}_i\left(B_j\frac{\partial}{\partial x_i}A_j+A_j\frac{\partial}{\partial x_i}B_j\right)$$

$$=\sum_{i,j,m,n}\delta_{im}\delta_{jn}\left(\mathbf{e}_iB_j\frac{\partial}{\partial x_m}A_n+\mathbf{e}_iA_j\frac{\partial}{\partial x_m}B_n\right)$$

$$=\sum_{i,j,m,n}\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}+\delta_{in}\delta_{jm}\right)\left(\mathbf{e}_iB_j\frac{\partial}{\partial x_m}A_n+\mathbf{e}_iA_j\frac{\partial}{\partial x_m}B_n\right)$$

$$=\sum_{i,j,m,n}\delta_{in}\delta_{jm}\mathbf{e}_iB_j\frac{\partial}{\partial x_m}A_n+\sum_{i,j,m,n}\delta_{in}\delta_{jm}\mathbf{e}_iA_j\frac{\partial}{\partial x_m}B_n$$

$$+\sum_{i,j,m,n}\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)\mathbf{e}_iB_j\frac{\partial}{\partial x_m}A_n+\sum_{i,j,m,n}\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)\mathbf{e}_iA_j\frac{\partial}{\partial x_m}B_n$$

$$=\sum_{i,j}\mathbf{e}_iB_j\frac{\partial}{\partial x_j}A_i+\sum_{i,j}\mathbf{e}_iA_j\frac{\partial}{\partial x_j}B_i$$

$$+\sum_{i,j,m,n,k}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\mathbf{e}_iB_j\frac{\partial}{\partial x_m}A_n+\sum_{i,j,m,n,k}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\mathbf{e}_iA_j\frac{\partial}{\partial x_m}B_n$$

$$=\sum_{i,j}B_j\frac{\partial}{\partial x_j}A_i\mathbf{e}_i+\sum_{i,j}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}B_i\mathbf{e}_i$$

$$+\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_iB_j\sum_{m,n,k}\varepsilon_{mnk}\frac{\partial}{\partial x_m}A_n+\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_iA_j\sum_{m,n,k}\varepsilon_{mnk}\frac{\partial}{\partial x_m}B_n$$

$$=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_iB_j(\nabla\times\mathbf{A})_k+\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_iA_j(\nabla\times\mathbf{B})_k$$

$$=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})\qquad\blacklozenge$$

１．５．２

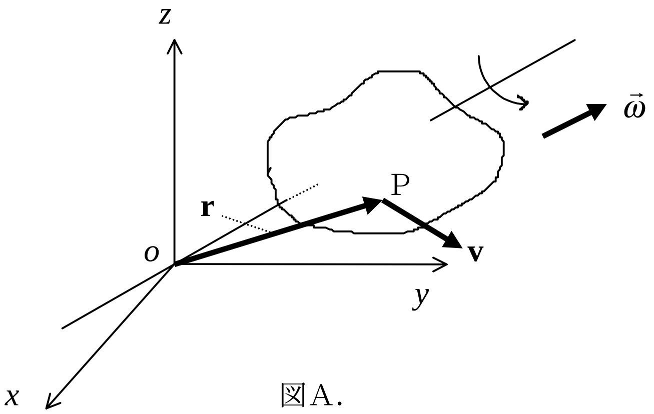
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{r})=\mathbf{r}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{r})$$

問題文より$\nabla\times\mathbf{A}=0$だから、右辺第１項はゼロとなる。また例題１．５．２より$\mathbf{r}$の回転はゼロだから、右辺第２項もゼロとなる。ゆえに

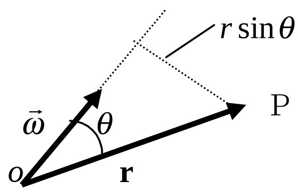
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{r})=0$$

となって、$\mathbf{A}\times\mathbf{r}$はソレノイダルであると分かる。　◆

1．5．3




図A．




図B．

点Ｐにおける速度$\mathbf{v}$の大きさvは、図Ｂより

$$\mathrm{v} = r\sin\theta\cdot\omega = \omega r\cdot\sin\theta \qquad ①$$

速度$\mathbf{v}$の方向$\mathbf{e}_{\mathrm{v}}$は、$\vec{\omega}$および$\mathbf{r}$の両方に垂直となる。（図Ｂの点Ｐにおいて、紙面を表から裏へと抜ける方向である。）

$$\mathbf{e}_{\mathrm{v}} = \frac{\vec{\omega}\times\mathbf{r}}{\left|\vec{\omega}\times\mathbf{r}\right|} = \frac{\vec{\omega}\times\mathbf{r}}{\omega r\cdot\sin\theta} \qquad ②$$

①，②より$\mathbf{v}$は

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}\mathbf{e}_{\mathrm{v}} = \vec{\omega}\times\mathbf{r}$$

となる。以下、（ａ）～（ｃ）について証明を行う。

（ａ）について：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{v} &= \nabla\cdot\left(\vec{\omega}\times\mathbf{r}\right)\\ &= \mathbf{r}\cdot\left(\nabla\times\vec{\omega}\right) - \vec{\omega}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{r}\right)\end{aligned}$$

右辺第１項については、回転する物体として剛体が仮定されている事から、物体の各点で$\vec{\omega}$は同じ値になる。よって定ベクトル$\vec{\omega}$の偏導関数$\nabla\times\vec{\omega}$はゼロとなる。また$\mathbf{r}$の回転はゼロだから、右辺第２項もゼロとなる。ゆえに

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

となって、$\mathbf{v}$ はソレノイダルであると分かる。

（b）について：

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \vec{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\vec{\omega} - \mathbf{r}(\nabla \cdot \vec{\omega}) - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} \\ &= 3\vec{\omega} + 0 - 0 - \left( \omega_x \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{r} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{r} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{r} \right) \\ &= 3\vec{\omega} - (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) \\ &= 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}\end{aligned}$$

（c）について：

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}) &= (\mathbf{r} \cdot \nabla)\vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\nabla \times \mathbf{r}) \\ &= 0 + \vec{\omega} + 0 + 0 = \vec{\omega}\end{aligned}$$

◆

1．5．4

式（1．56）を適用すると、$\nabla \cdot \mathbf{F}$ は

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= k\nabla \cdot \left( \frac{1}{r^n} \mathbf{e}_r \right) \\ &= k\left\{ \frac{1}{r^n}(\nabla \cdot \mathbf{e}_r) + \left( \nabla \frac{1}{r^n} \right) \cdot \mathbf{e}_r \right\}\end{aligned}$$

となる。ここで右辺の各項について個別に計算する。

① $\frac{1}{r^n}(\nabla \cdot \mathbf{e}_r)$ について：

例題 1．5．5 の関係式を利用する。

$$\frac{1}{r^n}(\nabla \cdot \mathbf{e}_r) = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{2}{r} = \frac{2}{r^{n+1}}$$

② $\left( \nabla \frac{1}{r^n} \right) \cdot \mathbf{e}_r$ について：

式（1．44）を利用する。

$$\left( \nabla \frac{1}{r^n} \right) \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{n}{r^{n+1}} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{n}{r^{n+1}}$$

①，②より$\nabla\cdot\mathbf{F}$は

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=k\left\{\frac{2}{r^{n+1}}-\frac{n}{r^{n+1}}\right\}=\frac{k(2-n)}{r^{n+1}}\quad,\qquad ③$$

$r=0$において上式は発散する（$n\neq 2$）か、あるいは不定（$n=2$）となる。それゆえ$r$の定義域は$r>0$となる。特に$n=2$の場合$\nabla\cdot\mathbf{F}=0$となって、$\mathbf{F}$はソレノイダルになる。

最後に$\mathbf{F}$の回転を調べる。

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F}&=k\nabla\times\left(\frac{1}{r^n}\mathbf{e}_r\right)\\&=k\left\{\frac{1}{r^n}(\nabla\times\mathbf{e}_r)+\left(\nabla\frac{1}{r^n}\right)\times\mathbf{e}_r\right\}\end{aligned}$$

上式右辺の各項について個別に計算する。

④ $\frac{1}{r^n}(\nabla\times\mathbf{e}_r)$ について：

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^n}(\nabla\times\mathbf{e}_r)&=\frac{1}{r^n}\left\{\nabla\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right\}\\&=\frac{1}{r^n}\left\{\frac{1}{r}(\nabla\times\mathbf{r})+\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\times\mathbf{r}\right\}\\&=\frac{1}{r^{n+1}}\{\nabla\times\mathbf{r}-\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_r\}=0\end{aligned}$$

⑤ $\left(\nabla\frac{1}{r^n}\right)\times\mathbf{e}_r$ について：

$$\left(\nabla\frac{1}{r^n}\right)\times\mathbf{e}_r=-\frac{n}{r^{n+1}}\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_r=0$$

④，⑤より$\nabla\times\mathbf{F}=0$、つまり$\mathbf{F}$は渦なし場であると分かる。　◆

1．5．5

まず問題文の式の左辺を展開する。

$$\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{m})=\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{m})+(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}-\mathbf{m}(\nabla\cdot\mathbf{B})-(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{m}\qquad ①$$

$\mathbf{m}$は定ベクトルだから、①式右辺の第１項と第４項はゼロになる。また$\mathbf{B}(\mathbf{r})$はソレノイダルだから、第３項もゼロになる。よって①式は

$$\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{m})=(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B} \qquad ②$$

となる。次に問題文の式の右辺を展開する。

$$\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{m})=(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{m}+\mathbf{m}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{m}) \qquad ③$$

$\mathbf{m}$ は定ベクトルだから、③式右辺の第２項と第４項はゼロになる。また $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は渦なし場だから、第３項もゼロになる。よって③式は

$$\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{m})=(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B} \qquad ④$$

となる。②，④より

$$\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{m})=\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{m})\ . \qquad ◆$$

1．5．6

問題文には「直交座標を用いて」とあるが、ここでは以前に「直交座標を用いて」導いた関係式を使って、証明を行う。

$\nabla\cdot\mathbf{e}_r$ については例題 1．5．5 で示した通りである。

$$\nabla\cdot\mathbf{e}_r=\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)=\frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{r}+\mathbf{r}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)=\frac{3}{r}+\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_r\left(-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{2}{r}$$

$\nabla\times\mathbf{e}_r$ については、

$$\nabla\times\mathbf{e}_r=\nabla\times\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)=\frac{1}{r}\nabla\times\mathbf{r}+\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\times\mathbf{r}=\frac{1}{r}\nabla\times\mathbf{r}-\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\times r\mathbf{e}_r=0\ . \qquad ◆$$