１．４　スカラー場のベクトル微分演算（問題）

1．4．1　ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \nabla\phi(\mathbf{r})$ が $\mathbf{r}$ と $\nabla\phi(\mathbf{r})$ の両方に直交すること、つまり

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{r} = 0,\quad \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\nabla\phi(\mathbf{r}) = 0$$

であることを証明せよ。

1．4．2　$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ として、次式を計算せよ。

（a）$\nabla(\ln r)$

（b）$\nabla(3z^2 - r^2)$

（c）$\nabla^2(\ln r)$

（d）$\nabla^2(3z^2 - r^2)$

1．4．3　$\phi(x,y,z) = \left[(x-1)^2 + y^2 + z^2\right]^{-1/2} + \left[(x+1)^2 + y^2 + z^2\right]^{-1/2}$ として、$\mathbf{r} = (x,y,z) = (1,1,1)$ における $\nabla\phi$ を計算せよ。

1．4．4　全空間に渡って $\nabla\phi(\mathbf{r}) \times \nabla\psi(\mathbf{r}) = 0$ を満足する２つのスカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ と $\psi(\mathbf{r})$ について、各々の場の等位面と力線がどのような関係にあるかを述べよ。

1．4．5　座標原点に中心をもつ半径 $\sqrt{3}$ の球を考える。この球面上の１点 $(1,1,1)$ にて接する平面上のあらゆる点 $\mathbf{r} = (x,y,z)$ で、方程式 $x + y + z = 3$ が成り立つことを証明せよ。［ヒント：スカラー場 $\phi(x,y,z) = x + y + z$ を考慮せよ。］

1．4．6　点 $(0,1,\sqrt{2})$ が、方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

$$2x + 2y + z^2 = 4$$

によって定義される２つの曲面の交線上にあることを証明せよ。また、この点におけるこれらの曲面の法線間の角度を計算せよ。

1．4．7　密度 ρ，半径 a，高さ h の均質な円筒状の物質を考える。これの、外部と接する中心軸上の２点における重力ポテンシャル $\phi(0),\phi(h)$ を計算せよ。また、それに対応する重力場 $\mathbf{F}(0),\mathbf{F}(h)$ を計算せよ。