

1.4 スカラー場のベクトル微分演算

ニュートンは、連続的な物理量の無限に小さな変位間での関連性と、そのような微小変位量を無限に加算して得る効果を理論的に解明した、最初の科学者であった。流体や、一般化された速度表示に関する彼の方法（1665年から66年にかけて発見されたが、彼の死後9年たった1736年、ようやく公表された）は、まさに微積分法の最初の発明だった。この方法を用いて彼は万有引力の理論を確立し、また天体の運行に関するケプラーの経験法則を導出することに成功した。

しかしながら、この新しい数学理論を体系的に記述し、1684年から86年にかけて最初に公表したのは数学者ライプニッツだった。彼は代数学に精通しており、またニュートンとほぼ同時期にこの計算法の発明に携わった。ライプニッツは、我々が今日計算に使っている記号を導入した。それは微積分法とよばれ、数学の多くの分野に浸透している。微積分法に関する最初のテキストは、1696年にル・ホスピタルによって出版されたが、今日学部で教えている計算法の多くが既に含まれていた。

いまや1変数のスカラー関数を取り扱うのは、たやすい事である。例えばリンゴの落下距離は時間の関数として表される事、その速度や加速度を得るための微分はどの時刻においても連続した値を与える事、等である。（スカラー関数とは、ただ1つの数“スカラー”によって値が表される関数のことである。スカラー関数はさまざまな値をとる。重要なのは、これら多くの関数値のどれもがスカラーだという事である。）多変数のスカラー関数を取り扱うことも、それほど難しいわけではない。例えば3つの独立変数 s, t, u からなる滑らかな（すなわち、微分可能な）スカラー関数 $\phi(s, t, u)$ の全微分は、偏微分からなる項の和として表される。

$$d\phi(s, t, u) = \frac{\partial\phi}{\partial s} ds + \frac{\partial\phi}{\partial t} dt + \frac{\partial\phi}{\partial u} du$$

1.4.1 スカラー場

位置座標 (x, y, z) のスカラー関数 $\phi(x, y, z)$ をスカラー場とよぶ。それは、スカラー $\phi(x, y, z)$ を空間内の各点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ に対応づけるための規則でもある。それゆえ、スカラー場のことをスカラー位置関数ともよぶ。物理学においては、空間内の事象を記述するうえで、スカラー場はとても重要である。

滑らかなスカラー場という時、位置座標 (x, y, z) に関して微分可能なスカラー場を指すものと約束する。位置の微小変位 $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ に対応する全微分はそれゆえ

$$d\phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \quad (1.38)$$

となる。 $d\phi$ は2つのベクトルのスカラー積として表されることも多い。

$$d\phi(x, y, z) = [\nabla\phi(x, y, z)] \cdot d\mathbf{r} \quad , \quad (1.39)$$

ここで

$$\nabla\phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} \equiv \nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (1.40)$$

はベクトル場、あるいはベクトル位置関数である。この式をみると、ベクトル $\nabla\phi(x, y, z)$ が3つの成分 $(\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z)$ と共に、空間内の各点 \mathbf{r} に対応づけられている事が分かる。

1.4.2 勾配演算子 ∇

スカラー場をベクトル場に変換する式(1.40)の演算で用いられている記号

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad (1.41)$$

を勾配演算子とよぶ。ベクトル場 $\nabla\phi(\mathbf{r})$ 自身は、スカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ の勾配 (gradient) と呼ばれる。演算子 ∇ は偏微分演算子と方向の両方を含んでおり、ベクトル微分演算子として知られている。生成されたベクトル場 $\nabla\phi(\mathbf{r})$ にとって両方の特徴は重要であり、それは他のベクトルと同様、長さ $|\nabla\phi(\mathbf{r})|$ と方向 $\mathbf{e}(\nabla\phi)$ をもつ：

$$|\nabla\phi(\mathbf{r})| = \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} , \quad \mathbf{e}(\nabla\phi) = \frac{\nabla\phi(\mathbf{r})}{|\nabla\phi(\mathbf{r})|} \quad . \quad (1.42)$$

以下の例題の計算は全て、直角座標にて行う。

例題 1.4.1 $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\frac{\partial}{\partial x}r^2 = 2x , \quad \frac{\partial}{\partial y}r^2 = 2y , \quad \frac{\partial}{\partial z}r^2 = 2z ,$$

$$\nabla r^2 = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = 2\mathbf{r} \quad .$$

ゆえに

$$|\nabla r^2| = 2r , \quad \mathbf{e}(\nabla r^2) = \mathbf{e}_r \quad . \quad (1.43)$$

例題 1.4.2 $\phi(\mathbf{r}) = r$:

$$\frac{\partial}{\partial x} r^2 = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d}{dr} r^2 = 2r \frac{\partial r}{\partial x} , \quad (y, z \text{ についても同様})$$
$$\nabla r = \frac{1}{2r} \nabla r^2 = \mathbf{e}_r .$$

ゆえに ∇r は、空間内のあらゆる点における動系方向の単位ベクトルとなる。

例題 1.4.3 $\phi(\mathbf{r}) = f(r)$:

$$\nabla f(r) = \frac{df(r)}{dr} (\nabla r) = \frac{df}{dr} \mathbf{e}_r . \quad (1.44)$$

例題 1.4.4 $\phi(\mathbf{r}) = \exp(-ar^2)$:

$$\nabla [\exp(-ar^2)] = \frac{d}{dr} \exp(-ar^2) \cdot (\nabla r)$$
$$= \mathbf{e}_r (-2ar) \exp(-ar^2) .$$

例題 1.4.5 $\phi(x, y) = xy$ は 2次元平面内にある。 $\nabla \phi(x, y) = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x$ である。ゆえに

$$|\nabla \phi| = (y^2 + x^2)^{1/2} = r , \quad \mathbf{e}(\nabla \phi) = \mathbf{i} \frac{y}{r} + \mathbf{j} \frac{x}{r} .$$

位置 \mathbf{r} における $\nabla \phi(\mathbf{r})$ がベクトルであることは、式 (1.40) より明らかである。 $d\mathbf{r}$ も同じくベクトルである。ゆえに

$$d\phi(\mathbf{r}) = [\nabla \phi(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r} = |\nabla \phi| dr [\mathbf{e}(\nabla \phi) \cdot \mathbf{e}(d\mathbf{r})]$$
$$= |\nabla \phi| dr \cos \theta , \quad (1.45)$$

ここで $dr = |d\mathbf{r}|$ である。3次元空間内の変位 $d\mathbf{r}$ が、 $\phi(\mathbf{r})$ の一定な面 (これを C とよぶ) 上に横たわるとき、

$$d\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r} - d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = C - C = 0$$

となる。 $|d\mathbf{r}|$ と $|\nabla \phi|$ の両方とも、必ずしもゼロになるとは限らないので、上述のことより一般的に

$$d\phi = 0 \text{ の時 } \cos \theta = 0 \text{ あるいは } \theta = \pi/2$$

と結論づけねばならない。このように、 ϕ が一定な面上のあらゆる $d\mathbf{r}$ に対して、 $\mathbf{e}(\nabla \phi)$ は必ず垂直になる。つまり、 $\mathbf{e}(\nabla \phi)$ はこの面と直交している。

物理学におけるスカラー場で特によく知られているのは、ポテンシャル場である。この場は、空間内にて物理系のポテンシャル（位置）エネルギーを与える。それゆえ ϕ が一定な3次元空間内の面のことを、等位面ともいう。2次元平面内では等位線となる。後者のよい例が、地形図の等高線である。これには地球表面上の各点の海拔（あるいは重力ポテンシャル）が記されている。

例題 1.4.6 $\phi(x, y) = axy$ が地形図上の海拔（単位：m [メートル]）を与えるとき、等位であるための条件は $\phi = axy$ あるいは $y = \phi/ax$ となる。ここで a は単位 m^{-1} の定数である。等高線は、図 1.5 に示すように双曲線となる。ここでは $a = 10^{-4} m^{-1}$ とした。矢印は、峠の頂から両側の谷へと向かっている。

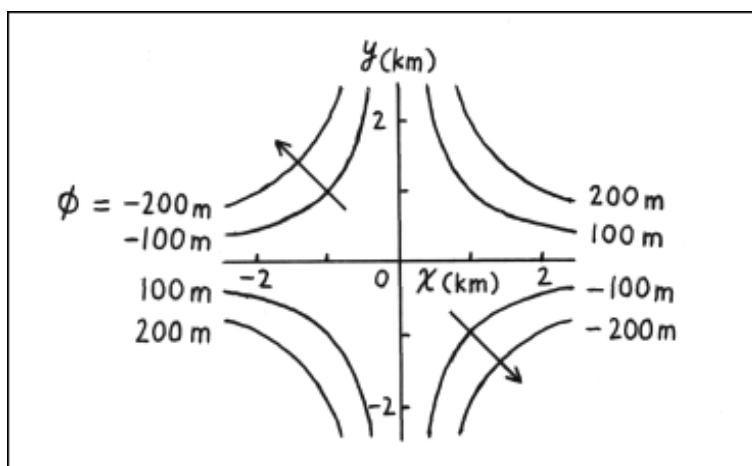


図 1.5 峠付近の等高線、あるいは“鞍 (saddle)”

これまで、いずれの位置 \mathbf{r} においても $\nabla\phi(\mathbf{r})$ は等位面と直交することを見てきた。 $\phi(\mathbf{r})$ が重力ポテンシャルの場合、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m\nabla\phi(\mathbf{r})$$

は質点 m に作用する重力を与える。それゆえ（上式の形で表される、あらゆる種類の）力もまた等位面と直交する。物質は位置 \mathbf{r} において $\mathbf{e}(\mathbf{F}(\mathbf{r}))$ に沿う加速を受ける。ゆっくり動きはじめた物質は、その結果、流線あるいは力線に沿って“自然に落下”する。 \mathbf{r} における接線は、物質に作用する力の方向 $\mathbf{e}(\mathbf{F}(\mathbf{r}))$ を与える。地図に記された河川は流線のよい例である。

式(1.45)に見られる $d\phi$ の変化は、変位方向 $\mathbf{e}(d\mathbf{r})$ にも依存する。 $d\mathbf{r}$ が流線の上り勾配方向 $\mathbf{e}(\nabla\phi)$ に沿う時、 $\mathbf{e}(d\mathbf{r}) = \mathbf{e}(\nabla\phi)$ となり、また $\cos\theta = 1$ となることが分かる。 $d\phi$ の変化はそのとき最大値をとる。

$$(d\phi)_{\max} = |\nabla\phi|dr$$

これは次のようにも書ける。

$$|\nabla\phi| = \frac{(d\phi)_{\max}}{dr}$$

それゆえ位置 \mathbf{r} において、スカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ は $\mathbf{e}(\nabla\phi)$ に沿って最も急に、最大の傾き $|\nabla\phi|$ で変化する。この方向は等位面に垂直であり、かつ \mathbf{r} を通る流線あるいは力線と反平行である。

例題 1.4.7 スカラー場 $\phi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2$ について、点 $\mathbf{r} = (2,0,0)$ におけるベクトル $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 方向への方向微分係数を計算せよ。

ここで方向微分係数とは

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}(\mathbf{A})$$

のことである。換言すれば、 $\mathbf{e}(\mathbf{A})$ 方向への ϕ の変化率である。よって

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds} &= (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) / \sqrt{14} \\ &= (2x + 4y + 6z) / \sqrt{14} \end{aligned}$$

この式は $\mathbf{r} = (2,0,0)$ において値 $4/\sqrt{14}$ を与える。なお、 ϕ の等位面は球面になる。

1.4.3 演算子 ∇^2

スカラー積

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

はラプラシアンと呼ばれるスカラー微分演算子である。この呼び方は、18世紀のフランス数学者ラプラス (Laplace) にちなんで名付けられた。スカラーと冠せられているのは、それが作用対象である場のベクトル的特性を変えないからである。それゆえ $\phi(\mathbf{r})$ がスカラー場のとき $\nabla^2\phi(\mathbf{r})$ はスカラー場となる。一方 $\nabla^2[\nabla\phi(\mathbf{r})]$ はベクトル場となるが、それは $\nabla\phi(\mathbf{r})$ がベクトル場だからである。

座標 x, y, z のうち 1 つあるいはそれ以上、符号が反転した場合でも、ラプラシアンは不変である。これらの空間反転操作 ($x \rightarrow -x$, etc.) のうちの 1 つに対して符号が変わらない (あるいは反転する) ような関数 $\phi(\mathbf{r})$ は、 ∇^2 の作用後もその性質を保つ。変数の符号反転の下で、関数あるいは演算子の符号が不変であったり反転したりする性質を、パリティ (偶奇性) とよぶ。それゆえ ∇^2 演算子は偶パリティをもつと言われる。

∇^2 は、作用対象である場のベクトル的特性およびパリティに影響を及ぼさない、極めてシンプルな微分演算子である。これらの事は、なぜ ∇^2 がひんばんに運動方程式や物理系の状態方程式に現れるかということの、理由の 1 つにもなっている。

例題 1.4.8 $(\partial^2/\partial x^2)r^2 = 2$ であるから

$$\nabla^2 r^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) r^2 = 6 \quad .$$