１．３　置換記号

物理的な空間に対する我々の直観的な（すなわち幾何学的な）認識は、太古の昔からのものである。幾何学に関する仕事――図形の面積や固体の体積の公式化――で知られたアルキメデスは、おそらく古代ギリシャにおける最も偉大な数学者であろう。彼の名が冠せられた水力学に関する有名な原理が、彼の幾何学的な洞察力の鋭さを物語っている。対照的に、我々が前節で用いた代数的な空間の記述法は、より後年になって発明されている。それは、９世紀から１１世紀にかけてアラビアの数学者たちが創始した代数学から発展した。（代数学「algebra」という言葉はアラビア語の「al-jabr」より派生したもので、もとは「骨を接ぐ」という意味だった。９世紀ごろ書かれた、代数学に関する有名なアラビアの書物のタイトルに、この言葉が初めて登場した。）そして１９世紀、ハミルトンが「ベクトル」という言葉を造った。

代数による空間の記述は、記号と抽象的な概念より成り立っている。その難解さゆえ、発展するのに多くの年月を要した。この技術を習得するのは、おそらく容易なことではない。本節にて空間内のベクトル積を再考することで、代数の置換演算の有用性をより明らかにしていく。

まず、ベクトル積の行列式（1．23）を思い出そう。いくつも連続したベクトル積を取り扱う際、このような表式はとても扱いにくい。（例えば$\mathbf{A}\times\left[\mathbf{B}\times\left(\mathbf{C}\times\mathbf{D}\right)\right]$を行列式へ書き下すことを試みよ。）しかしながら、ベクトル積の構造は非常にシンプルである。積の結果はやはり空間内のベクトルであり、必ず３つの成分をもつ。例えば式（1．24）のうちの１つは

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\varepsilon_{121}\mathbf{e}_1+\varepsilon_{122}\mathbf{e}_2+\varepsilon_{123}\mathbf{e}_3$$

と書くことができる。ここでベクトル積の成分はε_{12k}によって示されている。最初の２つの指標（12）は左辺の単位ベクトルに対応し、最後の指標kは右辺のベクトル成分に対応する。$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3$であることは既に分かっているから（この結果は、ベクトル積に関する右手系の規則に由来する）、必ず

$$\varepsilon_{121}=0,\ \ \varepsilon_{122}=0,\ \ \varepsilon_{123}=1$$

となる。

$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ は３×３＝９通りのベクトル積からなる。また ε_{ijk} は全部で９×３＝２７通りの成分からなる。式（1．24）は、$i \neq j \neq k$ である６つの場合を除いて、これらの成分がゼロとなる事を示している。すなわち

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,\ \ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1\ . \qquad （1．31）$$

式（1．31）に現れる指標の６通りの組合せを、３つの添字１,２,３の置換あるいは並び換えと言う。この理由で ε_{ijk} は置換記号と呼ばれる。

1．3．1　置換

式（1．31）における指標の６通りの組合せを、より詳しく調べてみよう。最初の組 123 は、３つの添字 1,2,3 を昇順に並べたものである。残りの５組もまたこれらの添字を並べたものだが、123 とは並び順が異なる。それらは元の数列 123 の置換（あるいは並べ換え）とよばれる。数列 123 はそれ自身、他の５組いずれかの置換である。言いかえれば、６つの組全てが他のいずれかの組の置換である。

我々はいまや、1,2,3 のような異なる３つの物の並び順には６通りしかない、ということを示すことができる。これら３つの数字を並べる際、３つの中のどれを最初の位置においてもよい。残りの２つのうち、いずれかが２番目の位置に収まる。最後に残った１個は、必然的に最後の位置へ収まる。すなわち並び順の総数は 3×2×1＝６に等しい。

123 のような元の数列からの置換は、隣りあう添字同士の互換、あるいは交換を連続して行うことにより得られる。並び換えに要した交換回数が偶数（あるいは奇数）のとき、これを偶置換（あるいは奇置換）という。例えば 213 は 123 の奇置換だが、これは１回の交換 12→21 で済むからである。一方 231 は偶置換であり、12→21 そして 13→31 の交換を要する。式（1．31）は、３つの指標からなる置換記号が 123 の偶置換のとき値１をとり、123 の奇置換のとき値－１をとることを示している。

ここで再び代数列 ijk に立ち戻ろう。ijk の偶置換の場合、置換記号の値は変わらない。一方で奇置換の場合、置換記号の符号は反転する。すなわち

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}\ . \qquad （1．32）$$

ε_{112} や ε_{111} といった、２つあるいはそれ以上の同じ指標をもつ置換記号は、123 の置換によっては得られない。それらは値０をとるが、同時に式（1．32）を満足する。

1．3．2　置換記号によるベクトル積の表示

式（1．24）を含む９つの方程式を、要約した形式

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad , \qquad i, j, k = 1, 2, \text{ or } 3 \qquad (1.33)$$

で書いておくと便利である。この表記法を用いて、ベクトル積 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ を

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= \left(\sum_{m=1}^{3} B_m \mathbf{e}_m \right) \times \left(\sum_{n=1}^{3} C_n \mathbf{e}_n \right) \\ &= \sum_{m,n} B_m C_n (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) \\ &= \sum_{m,n,j} (B_m C_n \varepsilon_{mnj}) \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

と書くことができる。これによれば $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ は成分

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_j = \sum_{m,n} B_m C_n \varepsilon_{mnj} = \sum_{m,n} \varepsilon_{jmn} B_m C_n \qquad (1.34)$$

を持つ。なぜなら jmn は mnj の偶置換のためである。例えば次式

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_1 &= \sum_{m,n} \varepsilon_{1mn} B_m C_n = \varepsilon_{123} B_2 C_3 + \varepsilon_{132} B_3 C_2 \\ &= B_2 C_3 - B_3 C_2 \end{aligned}$$

は既知の幾何学的方法による結果と一致する。

この表記法によれば $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ を書き下す何通りもの方法があり、また mnj の異なる置換は同等に扱われる。式（1．32）の助けを借りて、あるいは指標のつけ替えにより、以下の表現形式を得る。

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \sum_{m,n,j} B_m C_n \mathbf{e}_j \begin{cases} \varepsilon_{mnj} \\ \varepsilon_{njm} \\ \varepsilon_{jmn} \\ (-1)\varepsilon_{nmj} \\ (-1)\varepsilon_{jnm} \\ (-1)\varepsilon_{mjn} \end{cases} = \sum_{m,n,j} \varepsilon_{mnj} \begin{cases} B_m C_n \mathbf{e}_j \\ B_n C_j \mathbf{e}_m \\ B_j C_m \mathbf{e}_n \\ (-1) B_n C_m \mathbf{e}_j \\ (-1) B_j C_n \mathbf{e}_m \\ (-1) B_m C_j \mathbf{e}_n \end{cases} \qquad (1.35)$$

ここで第２の関係式の組において、ε から要素 $BC\mathbf{e}$ のほうへ、指標の交換関係が移されている。

明瞭で直観的な幾何学的方法が既にあるにも関わらず、なぜこのような抽象的で難解な表記法を用いて計算すべきなのだろうか？それは$\mathbf{A}\times\left[\mathbf{B}\times\left(\mathbf{C}\times\mathbf{D}\right)\right]$のような連続したベクトル積を計算するのに必要だからである。式（1．35）は、ベクトル積のどの表示でもε記号が１回出現することを示している。これを利用してn個のベクトルからなる積を、n個のベクトル成分からなる項の総和として表現することができる。このような積の総和は多くの場合、次に示す３つの要約した公式の助けを借りて簡素化できる：

$$\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{mnk}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{mn1}\varepsilon_{ij1}+\varepsilon_{mn2}\varepsilon_{ij2}+\varepsilon_{mn3}\varepsilon_{ij3} = \delta_{mi}\delta_{nj}-\delta_{mj}\delta_{ni} \qquad \text{（1．36a）}$$

$$\sum_{j,k}\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{njk} = 2\delta_{mn} \qquad \text{（1．36b）}$$

$$\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}^{2} = 6 \qquad \text{（1．36c）}$$

ここで右辺の記号δを、クロネッカーのδ記号という。

これらの要約した公式は以下の方法で証明できる。式（1．36c）はちょうど、指標 123 の６通りの置換からくる６つの値１の要素の総和となっている。式（1．36b）は$m\neq n$のとき０を与えるが、それは総和の各項が、同じ指標をもつ置換記号を含むためである。$m=n$（例えば＝１）のとき０以外の項は２つ（$jk=23$あるいは32）だけであり、それぞれ値１をとる。式（1．36a）はijがmnの置換でないとき０を与えるが、それは総和の各項が、同じ指標をもつ置換記号を含むためである。ijがmnの置換であれば、$ij=mn$のとき総和は＋１となり、$ij=nm$のとき－１となる。これらは右辺の２項に示されている。以上の議論は少し抽象的すぎたかもしれない。式の意味をよく理解できない読者は、これらの総和の一部あるいは全部を展開して書き出すとよい。これは演習（問題 1．3．4）として残しておこう。

以上のことより、条件さえ揃えば、式中に含まれる２つのε記号を２つとも消去できる。このような場合はいつでも、縮約後の式においてベクトル積の数が以前より２つ少なくなっている。この方法によれば、非常に複雑な式を代数的に見通しよく（すなわち、計算しやすい形に）整理できる。この縮約の方法を、次の例題で説明しておく。

例題１．３．１　$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ の BAC 則表示を証明せよ。

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \left(\sum_i A_i \mathbf{e}_i\right)\times\left(\sum_j (\mathbf{B}\times\mathbf{C})_j \mathbf{e}_j\right) && \cdots \text{ 式（1．34）を適用} \\
&= \sum_{i,j,k} A_i (\mathbf{B}\times\mathbf{C})_j \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k && \cdots \text{ 式（1．33）を適用} \\
&= \sum_{i,j,k} A_i \left(\sum_{m,n} B_m C_n \varepsilon_{mnj}\right)\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k && \cdots \text{ 式（1．34）を適用} \\
&= -\sum_{i,k}\sum_{m,n} A_i B_m C_n \mathbf{e}_k (\delta_{mi}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{ni}) && \cdots \text{ 式（1．36a）を適用}
\end{aligned}$$

最後の式で、全体にわたりマイナスの符号が掛かっているのは、ε_{ijk} を $-\varepsilon_{ikj}$ へ書き換えたことによる。i 及び k（あるいは m 及び n）に関する総和は、次式の助けをかりて直ちに実行できる。

$$\begin{aligned}
\sum_i A_i \delta_{mi} &= A_1\delta_{m1} + A_2\delta_{m2} + A_3\delta_{m3} \\
&= A_m \\
\sum_k \mathbf{e}_k \delta_{nk} &= \mathbf{e}_n
\end{aligned}$$

ここで $m=i$ 以外のとき δ_{mi} は消えることに注意せよ。これは、総和が単に項 A_m あるいは $\mathbf{e}_n$ のみで表されることを意味する。それゆえ

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= -\sum_{i,m,n} A_i B_m C_n (\delta_{mi}\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m\delta_{ni}) \\
&= -\sum_{m,n} B_m C_n (A_m\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m A_n) \\
&= -(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\sum_n C_n\mathbf{e}_n + \mathbf{B}\sum_n C_n A_n \\
&= \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})
\end{aligned} \qquad \text{（1．37）}$$

となる。ここで最後の計算は、それぞれ９項からなる総和を、３項からなる総和の積へ整理しなおす事により得られる。

$$\begin{aligned}
-\sum_{m,n} A_m B_m C_n \mathbf{e}_n &= -\left(\sum_n C_n \mathbf{e}_n\right)\left(\sum_m A_m B_m\right) \\
&= -\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})
\end{aligned}$$

（この式の意味が分からなければ、m および n に値 $1, 2, 3$ を代入し、９項すべてを展開して書き出してみよ。）

この代数的な方法で用いた純粋に形式的な操作には、煩わしさを感じずにはいられない。問題は、計算があまりに抽象的で機械的な点にある。その結果、計算途中や最後の解答において幾何学的な意味を捉えるのが難しい。そのため可能な限り 1．1 節で述べた基礎的な幾何学的方法論を用い、ほんとうに複雑な式を計算する時のみ抽象的な代数演算に頼るよう、心掛けるべきである。式がとても複雑なときこそ、たいてい代数的手法が唯一のふさわしい計算方法となる。