１．２　空間のベクトル

物理学とは、時空間内で起こる様々な物理現象を取り扱う学問である。ニュートン力学では、時間は空間から完全に独立している。この時間座標の独立性は、次の文中で見られるように、たった１つの数字（たとえば５）で特徴づけられる。「現在、５分を経過した。」このような、１つの数値で完全に表される量をスカラーという。

これに対して、ベクトルとよばれる量は、３個の数の組で表される。ベクトルを特徴づけるには、３次元空間内の１点を指定する必要がある。以下の数式は、直交座標系（あるいはカーテシアン座標系）上の１点を特徴づけるための、同等な表記法である。

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, y, z) \\ &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = (x_1, x_2, x_3)\end{aligned} \qquad （1．1）$$

ここで座標には、任意に選ばれた座標原点からの距離 x , y , z （あるいは同等な表現 x_1, x_2, x_3）が目盛り付けされている。また $\mathbf{r}$ を、空間内の１点を表す位置ベクトルとよぶ。ベクトル $\mathbf{r}$ を構成する数値の組（x_1, x_2, x_3）は成分とよばれる。

スカラーとは異なり、ベクトル $\mathbf{r}$ は長さと向きの両方を有する。位置ベクトル $\mathbf{r}$ の長さは幾何学的に算出することができ、

$$r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \qquad （1．2）$$

となる。また向きについては、$\mathbf{r}$ 方向の単位ベクトル

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\mathbf{r} = \frac{1}{r}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \qquad （1．3）$$

で与えられる。上式より明らかに、単位ベクトルは $\mathbf{r}$ に平行であると分かる。それゆえ $\mathbf{r}$ を次のように書く。

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}(\mathbf{r}) \qquad （1．4）$$

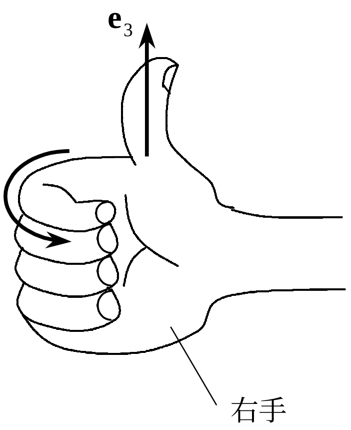
特に式（1．1）で見られた次のベクトル

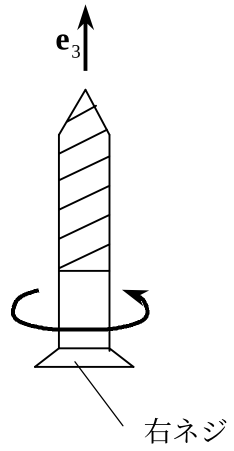
$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_1,\quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3 \qquad （1．5）$$

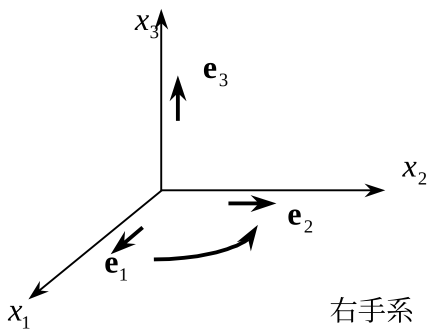
は、任意に選ばれた各々の座標軸 x , y , z に沿う単位ベクトルである。これらの座標軸は互いに直交するよう選ばれるため、次の関係式が成立する。

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \qquad （1．6）$$

この記号δ_{ij}は、クロネッカーのデルタと呼ばれる。（単位ベクトル$\mathbf{e}_1$～$\mathbf{e}_3$はまた、右手系を形成する。右手系とは、$\mathbf{e}_1$から$\mathbf{e}_2$へ右ネジを回転させた時、右ネジに$\mathbf{e}_3$方向への前進を与える、そのような座標系のことである。）







以上のことから任意のベクトル$\mathbf{A}$を表すのに、直交成分(A_x, A_y, A_z)を用いるか、あるいは長さAと方向$\mathbf{e}(\mathbf{A})$を用いるか、そのどちらでも良いことになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{3} A_i\mathbf{e}_i \\ &= A\mathbf{e}(\mathbf{A}) \end{aligned} \qquad （1．7）$$

１．２．１　ベクトル代数

これまでの議論において我々は、ベクトル代数を定義する、２つの基本的な代数演算を用いてきた。

ベクトルの和：

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z) \qquad (1.\ 8)$$

スカラー倍：

$$\mathbf{C}=\lambda\mathbf{A}=(\lambda A_x, \lambda A_y, \lambda A_z) \qquad (1.\ 9)$$

代数学の知識より、これらを演算して得る量は演算前と同種の量、すなわちベクトルとなる事が分かる。

ゼロベクトル（あるいはヌルベクトル）$\mathbf{0}$ は、次式で定義される。

$$\mathbf{0}=0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}=(0,0,0) \qquad (1.\ 10)$$

さらに、ベクトル $\mathbf{A}$ に正反対な $-\mathbf{A}$ も次式で定義される。

$$(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\mathbf{0}\ , \qquad (1.\ 11)$$

すなわち

$$-\mathbf{A}=-A_x\mathbf{i}-A_y\mathbf{j}-A_z\mathbf{k}=-A\mathbf{e}(\mathbf{A})\ . \qquad (1.\ 12)$$

式（1．2）によれば、$-\mathbf{A}$ は $\mathbf{A}$ と同じ長さ A を持つのだから

$$\mathbf{e}(-\mathbf{A})=-\mathbf{e}(\mathbf{A})\ , \qquad (1.\ 13)$$

すなわち $-\mathbf{A}$ は、$\mathbf{A}$ と正反対の方向を指すことが分かる。

例題１．２．１

２つのベクトル代数

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$

の和は、以下の通りである。

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$

加算後のベクトル $\mathbf{C}$ は、長さ

$$C=(C^2{}_x+C^2{}_y+C^2{}_z)^{1/2}=(1+4+9)^{1/2}=(14)^{1/2}$$

と方向

$$\mathbf{e}(\mathbf{C})=\frac{\mathbf{C}}{C}=\frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$$

を持つ。　　◆

１．２．２　空間の幾何学

ベクトル $\mathbf{A}$ を長さ A と向き $\mathbf{e}(\mathbf{A})$ で表す方法は、基本的に幾何学的なものである。というのも幾何学では大きさと形状、すなわち空間の特性を取り扱うからである。特に「長さ」の概念は、２つのベクトルのスカラー積（あるいは内積）の特殊な場合と考えてよい。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (1.\ 14)$$

上式は次のスカラー積を含んでいる。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}={A^2}_x+{A^2}_y+{A^2}_z=A^2 \qquad (1.\ 15)$$

「向き」の概念については、２次元平面内で考えるのが、最も容易に理解しやすい。$\mathbf{e}(\mathbf{A})$ を x, y 成分に分解してみよう：

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\mathbf{A})&=\cos\theta_{Ax}\mathbf{e}_x+\sin\theta_{Ax}\mathbf{e}_y\\&=\cos\theta_{Ax}\mathbf{e}_x+\cos\theta_{Ay}\mathbf{e}_y\ ,\end{aligned} \qquad (1.\ 16)$$

ここで θ_{Ai} は $\mathbf{e}(\mathbf{A})$ と i 軸の正の向きがつくる方向角である。これら $\mathbf{e}(\mathbf{A})$ の成分は方向余弦とよばれる（図１．１参照）。

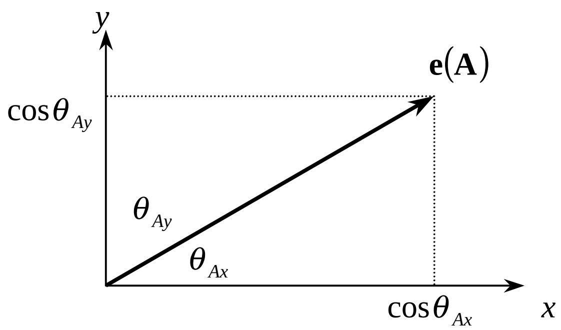


図１．１　方向余弦

方向余弦の各々はスカラー積によって抽出することができる。例えば

$$\mathbf{e}(\mathbf{A})\cdot\mathbf{e}_x = \left(\cos\theta_{Ax}\mathbf{e}_x + \cos\theta_{Ay}\mathbf{e}_y\right)\cdot\mathbf{e}_x = \cos\theta_{Ax} \quad . \qquad (1.\ 17)$$

数学的帰納法を用いて、単位ベクトル $\mathbf{e}(\mathbf{A})$ の方向余弦への分解を３次元空間へ拡張することは、もはや容易である。その結果は

$$\mathbf{e}(\mathbf{A}) = \cos\theta_{Ax}\mathbf{e}_x + \cos\theta_{Ay}\mathbf{e}_y + \cos\theta_{Az}\mathbf{e}_z \quad . \qquad (1.\ 18)$$

また式（1．17）を式（1．18）へ代入して得られる結果は

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\mathbf{A}) &= [\mathbf{e}(\mathbf{A})\cdot\mathbf{e}_x]\mathbf{e}_x + [\mathbf{e}(\mathbf{A})\cdot\mathbf{e}_y]\mathbf{e}_y + [\mathbf{e}(\mathbf{A})\cdot\mathbf{e}_z]\mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{e}(\mathbf{A})(\cdot\,\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \cdot\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + \cdot\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \quad . \qquad (1.\ 19)\end{aligned}$$

この方程式は任意の単位ベクトル $\mathbf{e}(\mathbf{A})$、あるいは任意のベクトル $\mathbf{A}$ に適用できる。そのため「完全関係」とよばれる形式的な恒等関係

$$1 = \cdot\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \cdot\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + \cdot\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \qquad (1.\ 20)$$

の成立することが分かる。これは、３次元空間のベクトルは３つの成分を持つという、よく知られた事実を、象徴的に表している。さらに明言すると、例えば $\mathbf{A}$ の x 成分は、$\mathbf{A}$ の $\mathbf{e}_x$ への射影（すなわちスカラー積）によって得られる。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_x = A_x = A\mathbf{e}(\mathbf{A})\cdot\mathbf{e}_x = A\cos\theta_{Ax} \qquad (1.\ 21)$$

最後に、式（1．14）で示した２つのベクトルのスカラー積は、余弦関数を使った親しみやすい形で書けることに言及しておこう。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\mathbf{e}(\mathbf{A})\cdot\mathbf{e}(\mathbf{B}) = AB\cos\theta_{AB} \quad , \qquad (1.\ 22)$$

ここで θ_{AB} はベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の間の角である。

例題　１．２．２

$\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ の、$\mathbf{B} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ への射影を求めよ。

$\mathbf{A}$ の、$\mathbf{B}$ への射影を求めることは、$\mathbf{e}(\mathbf{B}) = \mathbf{B}/B$ への射影を求めることと同じである。ここで $B = \sqrt{5}$ である。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,/\,B = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\cdot(\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\,/\,\sqrt{5} \\ &= 8\,/\,\sqrt{5}\end{aligned}$$

◆

例題　１．２．３

空間内で、それぞれの座標軸$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$に対して等しい角をもつ、単位ベクトル$\mathbf{e}$を求めよ。また、この$\mathbf{e}$の性質について論ぜよ。

与えられた条件は$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$である。ここで$\theta_i$は$\mathbf{e}$と$\mathbf{e}_i$の間の角である。以上のことより

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \cos\theta_3 = \cos\theta = a \quad ,$$

ここでaはある定数を表す。したがって

$$\mathbf{e} = a\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3$$

は３つの座標軸すべてに沿って等しい成分をもつ。$\mathbf{e}$は単位長さを持つため、必然的に次の結果が導かれる。

$$1 = \left(a^2 + a^2 + a^2\right)^{1/2} = \sqrt{3}a \quad ,$$

$$a = 1/\sqrt{3} = \cos\theta \quad \text{あるいは} \quad \theta = \cos^{-1} 1/\sqrt{3} \quad ５５^\circ\ .$$

◆

例題　１．２．４

スカラー積を用いて加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

図 1．2 で示した２次元平面のベクトルより、以下のことが分かる。

$$\theta_{Ax} = \alpha, \quad \theta_{Bx} = \beta, \quad \theta_{AB} = \alpha+\beta,$$

$$\theta_{Ay} = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \theta_{By} = \frac{\pi}{2} - \beta\ .$$

我々の目的は$\cos(\alpha+\beta)$を導くことにあるのだから、次のスカラー積を検討すべきだろう。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos(\alpha+\beta) = A_x B_x + A_y B_y$$

上式より

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \left(\frac{A_x}{A}\right)\left(\frac{B_x}{B}\right) + \left(\frac{A_y}{A}\right)\left(\frac{B_y}{B}\right)\\ &= \cos\theta_{Ax}\cos\theta_{Bx} + \cos\theta_{Ay}\cos\theta_{By}\\ &= \cos\alpha\cos\beta + (-\sin\alpha)(\sin\beta)\ .\end{aligned}$$

◆

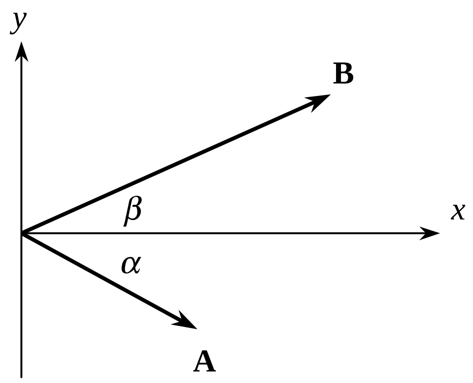


図１．２　加法定理

１．２．３　ベクトル積

もう１つのベクトル演算——ベクトル積（あるいは外積）——も、３次元空間のベクトルにとって重要である：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}\times\mathbf{C} &= \mathbf{i}\left(B_yC_z - B_zC_y\right) + \mathbf{j}\left(B_zC_x - B_xC_z\right) + \mathbf{k}\left(B_xC_y - B_yC_x\right) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = -\left(\mathbf{C}\times\mathbf{B}\right)
\end{aligned}
\qquad (1.\ 23)
$$

この方程式中、第２式における６つの項は３行×３列の配列として表されているが、これを行列式とよぶ。３×３行列式は２×２行列式の和として表すこともできる。

$$
\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} + \mathbf{j}\begin{vmatrix} B_z & B_x \\ C_z & C_x \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix},
$$

ここで $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ である。

本章にて３×３行列式が現れた場合はその都度、式（1．23）で示した６項からなる式を思い浮かべてほしい。例えばこの方程式の最終式に見られる反対称な特性は、記号 **B** と **C** を互いに交換した時、６項からなる式の符号も反転することから来ている。行列式に関する、より詳しい議論は２．３節で行う。

例題１．２．５

６つの項それぞれがゼロとなるため、

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad .$$

一方で

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_3 \;\; , \;\; \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \;\; , \;\; \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad . \qquad （1．24）$$

ここで $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ に次式を代入してみよう。

$$\mathbf{e}(\mathbf{B}) = \mathbf{e}_1 \;\; , \;\; \mathbf{e}(\mathbf{C}) = \cos\alpha \mathbf{e}_1 + \sin\alpha \mathbf{e}_2 \;\; , \qquad （1．25）$$

なお $\alpha = \theta_{BC}$ である。結果は

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= BC\mathbf{e}_1 \times (\cos\alpha \mathbf{e}_1 + \sin\alpha \mathbf{e}_2) \\ &= BC \sin\alpha \mathbf{e}_3 \end{aligned} \qquad （1．26）$$

となる。すなわち $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ は長さ $BC\sin\alpha$ と、$\mathbf{B}$ および $\mathbf{C}$ を含む平面に垂直な向き $\mathbf{e}_3$ を持つ。長さ $BC\sin\alpha$ は、図１．３の陰付き部分（$\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ を２辺とする平行四辺形）の面積に等しい。

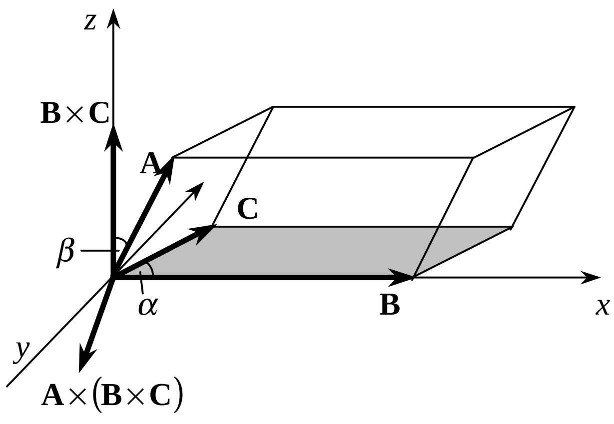


図１．３　ベクトル積，スカラー３重積，ベクトル３重積

スカラー３重積

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = A|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|\cos\beta = ABC\sin\alpha\cos\beta \qquad (1.\ 27)$$

は、図中に示した（ベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ を３辺とする）平行６面体の体積として説明される。

ベクトル

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_1 D_1 + \mathbf{e}_2 D_2 + \mathbf{e}_3 D_3$$

と、スカラー積

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D} = A_1 D_1 + A_2 D_2 + A_3 D_3$$

は非常に類似した構造をもっている。$\mathbf{e}_i$ と A_i の置換を要する点だけが異なる。同じような置換により、$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$は式（1．23）から直接

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

と書き下される。

２つの行が互いに交換される時、行列式の符号は反転する。これより以下のことが分かる。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= -\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B}) = -\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) = -\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{A}) \\ &= \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\end{aligned}$$

スカラー積で、積の順序はさほど重要ではない。そのため

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}\ . \qquad \blacklozenge$$

例題１．２．６

空間内の点 A，B，C を表す位置ベクトルを $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ とするとき、３角形 ABC の面積はどう表されるか？

図 1．４ より、３角形 ABC の３辺は次のベクトル

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

$$\mathbf{s}_3 = \mathbf{c} - \mathbf{a}$$

によって記述されることが分かる。

これらのベクトルは共面的である。なぜなら

$$\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_3=(\mathbf{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{b}-\mathbf{c})+(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{0} \quad ,$$

あるいは

$$\mathbf{s}_3=-(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2) \quad .$$

３角形の面積は、ベクトル積

$$\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$$

の半分の大きさである。

この式の右辺は、巡回置換 $\mathbf{abc}\to\mathbf{bca}$（すなわち $\mathbf{a}\to\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\to\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\to\mathbf{a}$ への置換）あるいは $\mathbf{abc}\to\mathbf{cab}$（すなわち $\mathbf{a}\to\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\to\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\to\mathbf{b}$ への置換）の下で不変である、という事にも注意しておこう。この結果として、左辺もまた巡回置換 123→231 あるいは 123→312 の下で不変となる。すなわち

$$\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_2\times\mathbf{s}_3=\mathbf{s}_3\times\mathbf{s}_1 \quad .$$

これらの等式は、より直接的に証明することもできる。たとえば

$$\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2=-\mathbf{s}_1\times(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_3)=-\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_3=\mathbf{s}_3\times\mathbf{s}_1 \quad .$$

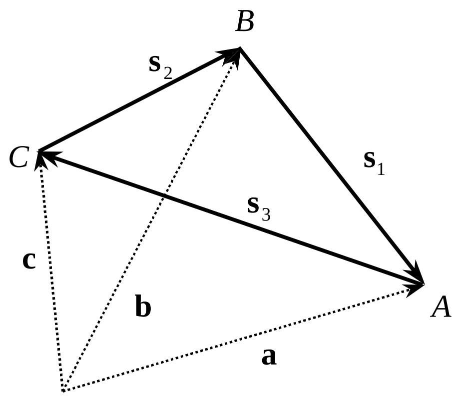


図１．４　３角形 *ABC* の面積

ベクトル３重積 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ についても言及しておく。$\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ が $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ を含む *BC* 平面に垂直なため、$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ は *BC* 平面上、$\mathbf{A}$ に垂直な方向へ横たわる事になる。この方向が図１．３に示してある。この結果のより正確な表現は、*BAC* 則

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad （1．28）$$

によって与えられる。

この公式は、式（1．26）の助けを借りて容易に証明できる。

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ 0 & 0 & BC\sin\alpha\end{vmatrix}=BC\sin\alpha(A_2\mathbf{e}_1-A_1\mathbf{e}_2)$$

$$=BCA_2\sin\alpha\mathbf{e}_1-BCA_1\sin\alpha\mathbf{e}_2$$

式（1．25）によれば

$$\mathbf{e}_1=\mathbf{e}(\mathbf{B}),\quad \sin\alpha\mathbf{e}_2=\mathbf{e}(\mathbf{c})-\cos\alpha\mathbf{e}_1$$

なのだから、結局

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(CA_2\sin\alpha+CA_1\cos\alpha)-\mathbf{C}BA_1$$
$$=\mathbf{B}(A_2C_2+A_1C_1)-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$
$$=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

となることが分かる。

BAC 則から、ベクトル３重積の他の形式を導き出すことができる。たとえば

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=-\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{C}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{A})\ ,$$

ここで表現の異なる各数式は、式（1．23）により互いに等しい。ここまでくれば式（1．28）の全ての項において、記号 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ を単に交換することで、BAC 則を適用できる：

$$\mathbf{C}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{A})=\mathbf{B}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})-\mathbf{A}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})\qquad（1．29）$$

これらの結果は、一般的に

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}\neq\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\qquad（1．30）$$

が成立することを示している。

これらの式は一般的に、同じ意味を持たない。なぜなら式（1．28）によれば $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ は BC 平面上へ横たわるが、一方で $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ は AB 平面上へ横たわるからである。$\mathbf{B}$ が $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ の両方に垂直な時だけ、２式は等しくなる。このとき式（1．28）と（1．29）の両方で、第２項がゼロとなる。　◆

例題１．２．７

$\mathbf{A}$ が任意のベクトルで $\mathbf{e}$ が任意の単位ベクトルである時、

$$\mathbf{A}=\mathbf{e}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e})+\mathbf{e}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{e})$$

を証明せよ。

これは BAC 則より直接導出できる。

$$\mathbf{e}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{e})=\mathbf{A}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})-\mathbf{e}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e})$$

ここで $\mathbf{e}=\mathbf{e}_x$ とおけば、代入することで $\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}$ の項が $A_x\mathbf{e}_x$ となることを理解できる。ゆえに残りの項は必然的に $A_y\mathbf{e}_y+A_z\mathbf{e}_z$（すなわち $\mathbf{e}$ に垂直な平面上へ横たわる $\mathbf{A}$ の成分）となる。特に $\mathbf{A}$ が xy 平面上にある場合、$A_z=0$ となる。そのため

$$\mathbf{A}\times\mathbf{e}=\left(A_x\mathbf{e}_x+A_y\mathbf{e}_y\right)\times\mathbf{e}_x=-A_y\mathbf{e}_z \quad ,$$

そして

$$\mathbf{e}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{e})=-A_y\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_z=A_y\mathbf{e}_y$$

となる。 ◆