基本的な数学公式

展開と因数分解

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (bc+ad)x + bd$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

数列　数列の和を次の記号で表現する．

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

数列の基本法則：

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$
$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

簡単な和の例：

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

平均と標準偏差　n 個の観測値 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の平均 $\bar{x}$ と標準偏差 s は次式で与えられ，s^2 を分散という．

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)}$$

指数と指数法則　a を正の定数，n を正の整数として，a^n の形を a の累乗（べき乗），n を指数といい，

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

が成り立つ．但し，m は整数である．指数を実数にも適用すると次の指数法則が得られる．

$$a^p a^q = a^{p+q}$$
$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$
$$(a^p)^q = a^{pq}$$
$$(ab)^p = a^p b^p$$

指数関数　a を 1 でない正の数として，

$$y = a^x$$

を a を底とする指数関数という．また，$x = 0$ において接線の傾きが 1 の指数関数を，

$$y = e^x$$

と表記し，e を自然対数の底（Napier の数）という．e は次式で与えられる．

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828\cdots$$

実用的に使用される指数関数は 10^x と e^x であるが，微分や積分では後者が特に重要となる．

対数と対数法則　指数関数 $y = a^x$ において，y の値から x の値を求めるために対数という表記が導入された．

$$\log_a p = q \quad \Leftrightarrow \quad p = a^q$$

これを a を底とする p の対数といい，このとき，p をこの対数の真数という．但し，$a > 0$ で $a \neq 1$，であり，従って，$p > 0$ である．以下の対数法則が成り立つ．

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$
$$\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$$
$$\log_a p^r = r\log_a p$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

10 を底とする対数 $\log_{10} p$ を p の常用対数，e を底とする対数 $\log_e p$ を p の自然対数という．後者は微分や積分で重要であるため，底 e はしばしば省略される．また自然対数を $\log_e p$ のかわりに $\ln p$ という記号で表すことも多い．

対数関数　a を 1 でない正の数，x の定義域を正の実数として，

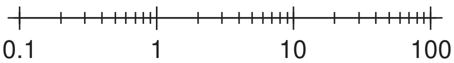
$$y = \log_a x \quad (x > 0)$$

を a を底とする対数関数という．対数関数と指数関数は逆関数の関係にある．

$$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y$$

通常は独立変数を x，従属変数を y と表記するので，この式の右側の表現を $y = \log_a x$ と書き直す．すると，$y = a^x$ のグラフと $y = \log_a x$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対象となる．実用的には $\log_{10} x$ と $\log_e x$ が使用され，後者ではしばしば底を省略する．また，$\log_e x$ を $\ln x$ と表記することも多い．

対数グラフ　ある数値 N を 10^p で表したときの指数 p で目盛を印したものを対数目盛という．目盛の間隔は $\log_{10} N$ に比例し，目盛のラベルには元の N を記す．



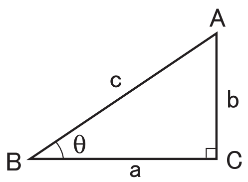
対数目盛を片方の軸だけに取ったグラフを片対数グラフといい，通常は縦軸が対数目盛である．両方の軸に対数目盛を取ったものを両対数グラフという．

片対数グラフで指数関数をプロットすると直線となる．指数関数 $y = ka^x$ の両辺の対数を取ると，

$$\log_{10} y = \log_{10} k + x \log_{10} a$$

この式は，$Y = \log_{10} y$，$K = \log_{10} k$，$A = \log_{10} a$ とおけば $Y = K + Ax$ の直線の形をしている．同様にして，両対数グラフではべき乗関数が直線となることが分かる．

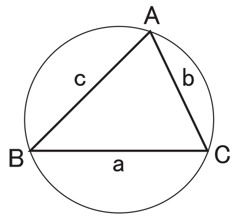
三角比（正弦・余弦・正接）



$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{b}{c} \\ \cos\theta &= \frac{a}{c} \\ \tan\theta &= \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

正弦定理と余弦定理



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

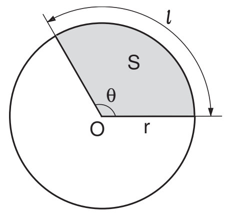
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

但し，R は ΔABC の外接円の半径．

度数法と弧度法



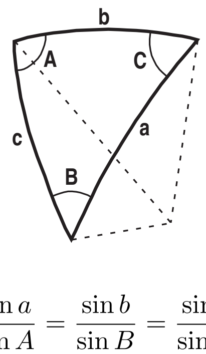
弧度法では角度を弧の長さと半径の比で表し，半径と同じ長さの弧を見込む角度を 1 ラジアン（radian）といい，度と次の関係にある．

$$180^\circ = \pi$$

角 θ に対する弧の長さ l と面積 S は次式で表される．

$$l = r\theta$$
$$S = \frac{1}{2}r^2\theta$$

球面三角形の正弦・余弦定理



$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

$$\cos b = \cos c\cos a + \sin c\sin a\cos B$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C$$

三角関数　x 軸から反時計回りを正とし，$\pm 180°$ を超えることも可とする角度を一般角という．一般角に対して定義された正弦，余弦，正接が三角関数である．

三角関数の性質　$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ などの公式のまとめ．なお，$\cot\theta$ は余接関数で，$1/\tan\theta$ と定義される．

	sin	cos	tan
$-\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$
$\pi/2 \pm \theta$	$\cos\theta$	$\mp\sin\theta$	$\mp\cot\theta$
$\theta \pm \pi/2$	$\pm\cos\theta$	$\mp\sin\theta$	$-\cot\theta$
$\pi \pm \theta$	$\mp\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\pm\tan\theta$
$\theta \pm \pi$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\tan\theta$

加法定理と倍角公式

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

積と和の公式

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\} \\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\} \\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\} \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\} \\
\sin A + \sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\
\sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \\
\cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\
\cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}
\end{aligned}$$

逆三角関数　$y = \sin x$ などにおいて，y から x を求める必要があるとき，逆三角関数を用いる．

$$\begin{aligned}
y = \sin x &\quad\Leftrightarrow\quad x = \arcsin y \\
y = \cos x &\quad\Leftrightarrow\quad x = \arccos y \\
y = \tan x &\quad\Leftrightarrow\quad x = \arctan y
\end{aligned}$$

前述のとおり，通常は上の右側の表記は独立変数を x，従属変数を y と書き直し，$y = \arcsin x$ を $y = \sin x$ の逆関数といい，両関数のグラフは直線 $y = x$ に関して対象となる．また，$y = \arcsin x$ は $y = \sin^{-1} x$ とも表記するが，$\sin x$ の逆数ではない．以上は，arccos や arctan についても同様である．

微分

関数の微分（定義）　関数 $y = f(x)$ の微分 dy/dx は次の極限で与えられる．

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

dy/dx は y'，$f'(x)$，$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d}{dx}f(x)$ とも表記する．

べき乗関数の微分　$y = x^n$ の微分を定義に従って求める．

$$\begin{aligned}
&(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1} \right) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

ここで，$\binom{n}{i}$ は n 個から i 個を取る組み合わせである（${}_n\mathrm{C}_i$ に同じ）．なお，指数が有理数の $y = x^p$ についても成り立つ．また，定数の微分は零である．

$$\begin{aligned}
&c' = 0 \\
&\{cf(x)\}' = cf'(x)
\end{aligned}$$

対数関数の微分　$y = \log_a x$ の定義による微分を求める．

$$\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \\
&= \frac{1}{x}\log_a e
\end{aligned}$$

但し，最後の変形には前述の自然対数の底（ネピアの定数）e を導入した．従って，e を底とする対数関数 $y = \log_e x$ の微分は次のように極めて簡単になる．

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

逆関数の微分　$y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の微分．

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x), \quad \Delta x = f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)$$

であり，$\Delta y \to 0$ のとき $\Delta x \to 0$ であるので，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\end{aligned}$$

同様にして，次の関係も導かれる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

指数関数の微分　指数関数 $y = a^x$ の微分を求めるには，その逆関数 $x = \log_a y$ の両辺を y で微分する．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{y}\log_a e \\ &= \frac{1}{a^x}\log_a e\end{aligned}$$

従って，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = a^x \frac{1}{\log_a e}$$

特に，底が e の指数関数 $y = e^x$ の微分は e^x 自身となる．

$$(e^x)' = e^x$$

なお，e^x は $exp(x)$ と表記することも多い．

基本的関数の微分公式

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x
$\log_e x$	$\frac{1}{x}$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

合成関数の微分公式　2つの関数から合成された関数，$y = f(u)$ と $u = g(x)$ については次式が成り立つ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

この公式を利用した例を以下にまとめた．

$f(x)$	$f'(x)$
$(ax+b)^\alpha$	$a\alpha(ax+b)^{\alpha-1}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\tan(ax+b)$	$\frac{a}{\cos^2(ax+b)}$
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\log_e(ax+b)$	$\frac{a}{ax+b}$

テイラー展開と近似式　一般に，$f(x)$ の $x = a$ のまわりの展開は次式で与えられる．

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots$$

例として，e^x の $x = 0$ のまわりでの多項式近似は，

$$\begin{aligned}e^x &\simeq e^0 + e^0(x-0) + \frac{1}{2!}e^0(x-0)^2 + \frac{1}{3!}e^0(x-0)^3 + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

となる．以下にテイラー展開を利用した，$|x| \ll 1$ のときの近似式の例を示す．

$$\begin{aligned}e^x &\approx 1 + x \\ \sin x &\approx x \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} \\ \sqrt{1+x} &\approx 1 + \frac{x}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &\approx 1 - \frac{x}{2}\end{aligned}$$

積分

不定積分　$f(x)$ の不定積分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ は，微分公式を逆に使用して求まる．以下にまとめた．

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$　$(\alpha \neq -1)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\log_e \lvert x \rvert$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\log_e \lvert f(x) \rvert$

定積分　$f(x)$ の a から b までの定積分は，$f(x)$ の不定積分の1つ $F(x)$ を用いて次式で与えられる．

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$