

対称群 (Symmetric Group)

1 対称群と置換群

n コの文字

$$1, 2, \dots, n$$

の置換の集合 X の持つ対称性を対称群 (Symmetric Group) と言う。

集合 X から X への 1 対 1 対応

$$\pi : X \rightarrow X$$

を X 上の置換と呼び、この置換のなす群を置換群と言う。

この置換は二行記法 (Cauchy's two-line notation) で

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表す。これは、

$$\pi(1) = i_1, \pi(2) = i_2, \pi(3) = i_3, \dots, \pi(n) = i_n$$

を意味する。

一般に、

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_k & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_k & \cdots & j_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

のとき、

$$\pi(i_k) = j_k, \quad \pi^{-1}(j_k) = i_k$$

となる。

逆置換

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

の逆置換は、

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

恒等置換

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

置換の積

置換 π_1 を施してから置換 π_2 を行う操作を $\pi_2\pi_1$ と書くことにする。

逆の流れもあるので、置換の演算を行う場合には注意が必要である。

2 S_2

S_2 の要素は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau$$

乗積表は、

	$\mathbf{1}$	τ
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	τ
τ	τ	$\mathbf{1}$

表 1: S_2 の乗積表

3 S_3

生成元として、

$$\begin{aligned} \sigma &= (1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \tau &= (1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を選ぶ。

生成元を用いた表記法

$$S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 = \mathbf{1} \rangle$$

$\sigma^3 = (\sigma\tau)^2$ から $\sigma^2 = \tau\sigma\tau$ 。両辺に右から τ を掛けて $\tau^2 = \mathbf{1}$ を用いると、

$$\sigma^2\tau = \tau\sigma$$

を得る。

また、 $\sigma^2 = \tau\sigma\tau$ の両辺に左から τ を掛けると、

$$\tau\sigma^2 = \sigma\tau$$

を得る。

S_3 の要素は全部で 6 つで、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= \mathbf{1}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= \sigma, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= \sigma^2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \tau, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} &= \tau\sigma, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= \tau\sigma^2, \end{aligned}$$

S_3 の乗積表は、

	1	σ	σ^2	τ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$
1	1	σ	σ^2	τ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$
σ	σ	σ^2	1	$\tau\sigma^2$	τ	$\tau\sigma$
σ^2	σ^2	1	σ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$	τ
τ	τ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$	1	σ	σ^2
$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$	τ	σ^2	1	σ
$\tau\sigma^2$	$\tau\sigma^2$	τ	$\tau\sigma$	σ	σ^2	1

表 2: S_3 の乗積表

S_3 の部分群

群を要素の数 (位数) で分類すると、

位数 1 : $\{1\}$

位数 2 : $\{1, \tau\}$, $\{1, \tau\sigma\}$, $\{1, \tau\sigma^2\}$

$$\begin{aligned}
H = \{1, \tau\} \text{ による左コセット分解} & : H = \{1, \tau\}, \quad \sigma H = \{\sigma, \tau\sigma^2\}, \quad \sigma^2 H = \{\sigma^2, \tau\sigma\} \\
H = \{1, \tau\sigma\} \text{ による左コセット分解} & : H = \{1, \tau\sigma\}, \quad \sigma H = \{\sigma, \tau\}, \quad \sigma^2 H = \{\sigma^2, \tau\sigma^2\} \\
H = \{1, \tau\sigma^2\} \text{ による左コセット分解} & : H = \{1, \tau\sigma^2\}, \quad \sigma H = \{\sigma, \tau\sigma\}, \quad \sigma^2 H = \{\sigma^2, \tau\} \\
H = \{1, \tau\} \text{ による右コセット分解} & : H = \{1, \tau\}, \quad H\sigma = \{\sigma, \tau\sigma\}, \quad H\sigma^2 = \{\sigma^2, \tau\sigma^2\} \\
H = \{1, \tau\sigma\} \text{ による右コセット分解} & : H = \{1, \tau\sigma\}, \quad H\sigma = \{\sigma, \tau\sigma^2\}, \quad H\sigma^2 = \{\sigma^2, \tau\} \\
H = \{1, \tau\sigma^2\} \text{ による右コセット分解} & : H = \{1, \tau\sigma^2\}, \quad H\sigma = \{\sigma, \tau\}, \quad H\sigma^2 = \{\sigma^2, \tau\sigma\}
\end{aligned}$$

位数 3 : $C_3 = \{1, \sigma, \sigma^2\}$ 巡回群 (cyclic group)

σ は偶置換なので、 C_3 は交代群 A_3 でもある。

$$C_3 = \{1, \sigma, \sigma^2\} \text{ による左コセット分解} : C_3 = \{1, \sigma, \sigma^2\}, \quad \tau C_3 = \{\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$$

$$C_3 = \{1, \sigma, \sigma^2\} \text{ による右コセット分解} : C_3 = \{1, \sigma, \sigma^2\}, \quad C_3\tau = \{\tau, \tau\sigma^2, \tau\sigma\}$$

- $\tau C_3 = C_3\tau$, $\sigma C_3 = C_3\sigma = C_3$, $\sigma^2 C_3 = C_3\sigma^2 = C_3$, $\Rightarrow C_3$ は正規部分群
- $S_3/C_3 = \{C_3, \tau C_3\}$ は剰余群である。

乗積表は、

	C_3	τC_3
C_3	C_3	τC_3
τC_3	τC_3	C_3

表 3: S_3/C_3 の乗積表

表 1 と表 3 を較べると、以下の対応関係があることが分かる。

$$\begin{array}{ccc}
S_2 & & S_3/C_3 \\
\mathbf{1} & \leftrightarrow & C_3 \\
\tau & \leftrightarrow & \tau C_3
\end{array}$$

これは、 S_3/C_3 と S_2 が同型であることを示している。すなわち、

$$S_3/C_3 \cong S_2$$

位数 6 : S_3

$$\mathbf{1} \triangleleft C_3 \triangleleft S_3$$

4 S_4

生成元 : $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$, $\tau = (1\ 2)$ すなわち、

$$S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = (\tau\sigma)^3 = (\sigma\tau)^3 = \mathbf{1} \rangle$$

$\sigma^4 = (\tau\sigma)^3$ より、 $\sigma^3 = (\tau\sigma)^2\tau$ 。この両辺に右から τ を掛けて $\tau^2 = \mathbf{1}$ を用いると、

$$\sigma^3\tau = (\tau\sigma)^2 \quad \text{同様にして、} \quad \tau\sigma^3 = (\sigma\tau)^2$$

また、

$$\tau\sigma^3\sigma^3\tau = (\sigma\tau)^2(\tau\sigma)^2 \quad \text{より} \quad \tau\sigma^2\tau = \sigma\tau\sigma^2\tau\sigma$$

を得る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= \mathbf{1}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} &= \sigma, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= \sigma^2, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= \sigma^3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= \tau, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} &= \tau\sigma, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= \tau\sigma^2, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \tau\sigma^3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} &= \sigma\tau, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \sigma\tau\sigma, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} &= \sigma\tau\sigma^2, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} &= \sigma\tau\sigma^3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= \sigma^2\tau, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} &= \sigma^2\tau\sigma, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} &= \sigma^2\tau\sigma^2, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= \sigma^2\tau\sigma^3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= \sigma^3\tau, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= \sigma^3\tau\sigma, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} &= \sigma^3\tau\sigma^2, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} &= \sigma^3\tau\sigma^3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= \tau\sigma^2\tau, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} &= \tau\sigma^2\tau\sigma, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} &= \tau\sigma^2\tau\sigma^2, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} &= \tau\sigma^2\tau\sigma^3 \end{aligned}$$

S_4 の主な部分群

交代群 A_4

交代群とは、偶置換の要素の集合からなる群のことである。 σ も τ も奇置換だから、 A_4 の要素は S_n の要素から σ と τ の数が合わせて偶数のものを抜き出せば良い。

$$A_4 = \{\mathbf{1}, \sigma^2, \tau\sigma, \tau\sigma^3, \sigma\tau, \sigma\tau\sigma^2, \sigma^2\tau\sigma, \sigma^2\tau\sigma^3, \sigma^3\tau, \sigma^3\tau\sigma^2, \tau\sigma^2\tau, \tau\sigma^2\tau\sigma^2\}$$

また、偶置換に奇置換 τ を掛けたものは奇置換なので、

$$S_4 = A_4 + \tau A_4$$

を得る。

$g \in S_4$ ならば、 $g \notin A_4$ の場合も $gA_4g^{-1} \in A_4$ なので、 A_4 は S_4 の正規部分群で、

$$S_4/A_4 \cong S_2$$

となる。

クラインの四元群 (Klein four group)

$$\begin{aligned}
 K &= \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \{1, \tau\sigma^2\tau\sigma^2, \sigma^2, \tau\sigma^2\tau\}
 \end{aligned}$$

	1	$\tau\sigma^2\tau\sigma^2$	σ^2	$\tau\sigma^2\tau$
1	1	$\tau\sigma^2\tau\sigma^2$	σ^2	$\tau\sigma^2\tau$
$\tau\sigma^2\tau\sigma^2$	$\tau\sigma^2\tau\sigma^2$	1	$\tau\sigma^2\tau$	σ^2
σ^2	σ^2	$\tau\sigma^2\tau$	1	$\tau\sigma^2\tau\sigma^2$
$\tau\sigma^2\tau$	$\tau\sigma^2\tau$	σ^2	$\tau\sigma^2\tau\sigma^2$	1

表 4: クラインの 4 元群の乗積表

表 4 は、対角線に対して対称である。これは、クラインの 4 元群は可換群 (アーベル群) であることを表している。

$$\sigma K = \{\sigma, \tau\sigma^2\tau\sigma, \sigma^3, \tau\sigma^2\tau\sigma^3\} = K\sigma, \quad (3)$$

$$\sigma^2 K = \{\sigma^2, \tau\sigma^2\tau, e, \tau\sigma^2\tau\sigma^2\} = K\sigma^2 = K, \quad \therefore \sigma^2 K = K \quad (4)$$

$$\sigma^3 K = \sigma(\sigma^2 K) = \sigma K, \quad \therefore \sigma^3 K = \sigma K \quad (5)$$

$$\tau K = \{\tau, \sigma^2\tau\sigma^2, \tau\sigma^2, \sigma^2\tau\} = K\tau, \quad (6)$$

$$\tau\sigma K = \{\tau\sigma, \sigma^2\tau\sigma, \tau\sigma^3, \sigma^2\tau\sigma^3\} = K\tau\sigma \quad (7)$$

$$\tau\sigma^2 K = \tau(\sigma^2 K) = \tau K, \quad \therefore \tau\sigma^2 K = \tau K \quad (8)$$

$$\tau\sigma^3 K = \tau\sigma(\sigma^2 K) = \tau\sigma K \quad (9)$$

$$\sigma\tau K = \{\sigma\tau, \sigma^3\tau\sigma^2, \sigma\tau\sigma^2, \sigma^3\tau\} = K\sigma\tau, \quad (10)$$

$$\sigma\tau\sigma K = \{\sigma\tau\sigma, \sigma^3\tau\sigma, \sigma\tau\sigma^3, \sigma^3\tau\sigma^3\} = K\sigma\tau\sigma, \quad (11)$$

$$\sigma\tau\sigma^2 K = \sigma\tau(\sigma^2 K) = \sigma\tau K \quad \therefore \sigma\tau\sigma^2 K = \sigma\tau K \quad (12)$$

$$\sigma^2\tau K = \sigma^2 K\tau = K\tau = \tau K, \quad \therefore \sigma^2\tau K = \tau K \quad (13)$$

$$\sigma^2\tau\sigma K = \sigma^2 K\tau\sigma = K\tau\sigma = \tau\sigma K, \quad \therefore \sigma^2\tau\sigma K = \tau\sigma K, \quad (14)$$

$$\sigma^2\tau\sigma^2 K = \sigma^2\tau K = \sigma^2 K\tau = K\tau = \tau K \quad \therefore \sigma^2\tau\sigma^2 K = \tau K \quad (15)$$

$$\sigma^2\tau\sigma^3 K = \sigma^2\tau\sigma K = \tau\sigma K, \quad \therefore \sigma^2\tau\sigma^3 K = \tau\sigma K \quad (16)$$

$$\sigma^3\tau K = \sigma^3 K\tau = \sigma K\tau = \sigma\tau K, \quad \therefore \sigma^3\tau K = \sigma\tau K \quad (17)$$

$$\sigma^3\tau\sigma K = \sigma^3 K\tau\sigma = \sigma K\tau\sigma = \sigma\tau\sigma K, \quad \therefore \sigma^3\tau\sigma K = \sigma\tau\sigma K \quad (18)$$

$$\sigma^3\tau\sigma^2 K = \sigma^3\tau K = \sigma^3 K\tau = \sigma K\tau = \sigma\tau K \quad \therefore \sigma^3\tau\sigma^2 K = \sigma\tau K \quad (19)$$

$$\sigma^3\tau\sigma^3 K = \sigma^3\tau\sigma K = \sigma^3 K\tau\sigma = \sigma K\tau\sigma = \sigma\tau\sigma K, \quad \therefore \sigma^3\tau\sigma^3 K = \sigma\tau\sigma K \quad (20)$$

$$\tau\sigma^2\tau K = \tau^2 K = K \quad \therefore \tau\sigma^2\tau K = K \quad (21)$$

$$\tau\sigma^2\tau\sigma K = \tau\sigma^2\tau\sigma K = \tau\sigma^2 K\tau\sigma = \tau K\tau\sigma = \sigma K, \quad \therefore \tau\sigma^2\tau\sigma K = \sigma K \quad (22)$$

$$\tau\sigma^2\tau\sigma^2 K = \tau\sigma^2\tau K = K, \quad \therefore \tau\sigma^2\tau\sigma^2 K = K \quad (23)$$

$$\tau\sigma^2\tau\sigma^3 K = \tau\sigma^2\tau\sigma K = \sigma K, \quad \therefore \tau\sigma^2\tau\sigma^3 K = \sigma K \quad (24)$$

- K は S_4 の正規部分群
- $S_4/K = \{K, \sigma K, \tau K, \tau\sigma K, \sigma\tau K, \sigma\tau\sigma K\}$ は剰余群である。

	K	$\tau\sigma K$	$\sigma\tau K$	τK	σK	$\sigma\tau\sigma K$
K	K	$\tau\sigma K$	$\sigma\tau K$	τK	σK	$\sigma\tau\sigma K$
$\tau\sigma K$	$\tau\sigma K$	$\sigma\tau K$	K	$\sigma\tau\sigma K$	τK	σK
$\sigma\tau K$	$\sigma\tau K$	K	$\tau\sigma K$	σK	$\sigma\tau\sigma K$	τK
τK	τK	σK	$\sigma\tau\sigma K$	K	$\tau\sigma K$	$\sigma\tau K$
σK	σK	$\sigma\tau\sigma K$	τK	$\sigma\tau K$	K	$\tau\sigma K$
$\sigma\tau\sigma K$	$\sigma\tau\sigma K$	τK	σK	$\tau\sigma K$	$\sigma\tau K$	K

表 5: S_4/K の乗積表

表 2 と表 5 を較べると、以下の対応関係があることが分かる。

S_3		S_4/K
$\mathbf{1}$	$\leftrightarrow$	K
σ	$\leftrightarrow$	$\tau\sigma K$
σ^2	$\leftrightarrow$	$\sigma\tau K$
τ	$\leftrightarrow$	τK
$\tau\sigma$	$\leftrightarrow$	σK
$\tau\sigma^2$	$\leftrightarrow$	$\sigma\tau\sigma K$

これは、 S_4/K が S_3 に同型であることを表している。すなわち、

$$S_4/K \cong S_3$$

- K は A_4 の正規部分群 でもある。
- (7) と (10) より、

$$A_4/K = \{K, \tau\sigma K, \sigma\tau K\}$$

	K	$\tau\sigma K$	$\sigma\tau K$
K	K	$\tau\sigma K$	$\sigma\tau K$
$\tau\sigma K$	$\tau\sigma K$	$\sigma\tau K$	K
$\sigma\tau K$	$\sigma\tau K$	K	$\tau\sigma K$

表 6: A_4/K の乗積表

一方、巡回群 $C_3 = \{1, \sigma, \sigma^2\}$ の乗積表は、

	1	σ	σ^2
1	1	σ	σ^2
σ	σ	σ^2	1
σ^2	σ^2	1	σ

表 7: C_3 の乗積表

ゆえに、

$$A_4/K \cong C_3 \quad \text{または、} \quad A_4/K \cong A_3$$

位数 2 の部分群

表 4 より、

$$H_1 = \{1, \tau\sigma^2\tau\sigma^2\},$$

$$H_2 = \{1, \sigma^2\},$$

$$H_3 = \{1, \tau\sigma^2\tau\}$$

- $\sigma^2 H_1 = H_1 \sigma^2 = \{\sigma^2, \sigma^2 \tau \sigma^2 \tau \sigma^2\}$

ところが、

$$\sigma^2 \tau \sigma^2 \tau \sigma^2 = \sigma (\sigma \tau \sigma^2 \tau \sigma) \sigma = \sigma \tau \sigma^2 \tau \sigma = (\sigma \tau)^2 (\tau \sigma)^2 = \tau \sigma^3 \sigma^3 \tau = \tau \sigma^2 \tau$$

または、上式の両辺に右から σ^2 を掛けると、

$$\sigma^2 \tau \sigma^2 \tau = \tau \sigma^2 \tau \sigma^2$$

だから、

$$\sigma^2 H_1 = H_1 \sigma^2 = \{\sigma^2, \tau \sigma^2 \tau\}$$

すなわち、

$$K = H_1 + \sigma^2 H_1$$

ゆえに、

$$K/H_1 = \{H_1, \sigma^2 H_1\} \cong S_2$$

- $\tau \sigma^2 \tau H_2 = H_2 \tau \sigma^2 \tau = \{\tau \sigma^2 \tau, \tau \sigma^2 \tau \sigma^2\}$ すなわち、

$$K = H_2 + \tau \sigma^2 \tau H_2$$

ゆえに、

$$K/H_2 = \{H_2, \tau \sigma^2 \tau H_2\} \cong S_2$$

- $\sigma^2 H_3 = H_3 \sigma^2 = \{\sigma^2, \tau \sigma^2 \tau \sigma^2\}$ すなわち、

$$K = H_3 + \sigma^2 H_3$$

ゆえに、

$$K/H_3 = \{H_3, \sigma^2 H_3\} \cong S_2$$

	H_1	$\sigma^2 H_1$
H_1	H_1	$\sigma^2 H_1$
$\sigma^2 H_1$	$\sigma^2 H_1$	H_1

表 8: K/H_1 の乗積表

	H_2	$\tau\sigma^2\tau H_2$
H_2	H_2	$\tau\sigma^2\tau H_2$
$\tau\sigma^2\tau H_2$	$\tau\sigma^2\tau H_2$	H_2

表 9: K/H_2 の乗積表

	H_3	$\sigma^2 H_3$
H_3	H_3	$\sigma^2 H_3$
$\sigma^2 H_3$	$\sigma^2 H_3$	H_3

表 10: K/H_3 の乗積表

$$\mathbf{1} \triangleleft H_i \triangleleft K \triangleleft A_4 \triangleleft S_4 \quad ((i = 1, 2, 3))$$