

積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ について $-2n\pi$ は何処へ行った?—

緑川章一*

逆 sin 関数

よく知られているように、 $\theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ は sin 関数の逆関数である。すなわち、 $x = \sin \theta$ が成り立つ。これは、 $x = \sin(\theta + 2n\pi)$ でもあることを表している。 $2n\pi$ は、何処へ行ったのだろうか。

Where have all the $2n\pi$ s gone?

まず、

$$x = \frac{s - s^{-1}}{2i} \quad (1)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= \left(\frac{s - s^{-1}}{2} \right)^2 + 1 \\ &= \left(\frac{s + s^{-1}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

となるので、

$$\sqrt{1-x^2} = \pm \left(\frac{s + s^{-1}}{2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{i}{s} \left(\frac{s + s^{-1}}{2} \right)$$

である (1) 式と (2) 式を s について解くと、

$$s = \pm \sqrt{1-x^2} + ix \quad (3)$$

これを、 $e^{i\theta}$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$) とおこう。すなわち、

$$s = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} + ix = e^{i\theta}, & \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ -\sqrt{1-x^2} + ix = e^{i\theta}, & \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (4)$$

特に、 $x = 0$ の場合には、

$$s = \begin{cases} 1 = e^0, \\ -1 = e^{i\pi} \end{cases} \quad (5)$$

*Shoichi Midorikawa

ゆえに、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -i \int_1^s \frac{ds}{s} = -i \ln s, & (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ i \int_{-1}^s \frac{ds}{s} = i \ln s + \pi, & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}) \end{cases} \quad (6)$$

(3) 式を (6) 式に代入すると、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -i \ln(\sqrt{1-x^2} + ix) = \theta, & (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ i \ln(-\sqrt{1-x^2} + ix) + \pi = -\theta + \pi, & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}) \end{cases} \quad (7)$$

を得る。

特に、

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき、 } x = 1, \quad (8)$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ のとき、 } x = -1 \quad (9)$$

$$\text{ゆえに、} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad (10)$$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ のとき、

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき、 } x = 1, \quad (11)$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ のとき、 } x = -1 \quad (12)$$

$$\text{ゆえに、} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \pi \quad (13)$$

(10) と (13) から、

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} + \left\{ \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right\} = 2\pi \quad (14)$$

そこで、(14) の左辺を $\oint \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ とおこう。すなわち、

$$\oint \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (15)$$

$$= -i \ln e^{2\pi i} \quad (16)$$

$$= 2\pi \quad (17)$$

とおく。両辺を n 倍すると、

$$n \oint \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2n\pi \quad (18)$$

$(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ の場合、(7) と (18) から、

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + n \oint \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -i \ln(\sqrt{1-x^2} + ix) - i \ln e^{2\pi i} \\ &= -i \ln e^{i(\theta+2n\pi)} \\ &= \theta + 2n\pi \end{aligned} \quad (19)$$

を得る。これは、 $e^{2n\pi i} = 1$ だから、(4) 式の s を

$$s = e^{i(\theta+2n\pi)} \quad (20)$$

と書きかえて (6) 式に代入した結果

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \theta + 2n\pi \quad (21)$$

に一致する。

加法定理

(7) 式において、 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ の場合について等式

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^w \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (22)$$

が成り立つときの u, v, w の関係を求めよう。

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (23)$$

$$= -i \ln \left(\sqrt{1-u^2} + iu \right) - i \ln \left(\sqrt{1-v^2} + iv \right) \quad (24)$$

$$= -i \ln \left\{ \left(\sqrt{1-u^2} + iu \right) \left(\sqrt{1-v^2} + iv \right) \right\} \quad (25)$$

$$= -i \ln \left\{ \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-v^2} - uv + i \left(u \sqrt{1-v^2} + v \sqrt{1-u^2} \right) \right\} \quad (26)$$

$$= -i \ln \left(\sqrt{1-w^2} + iw \right) \quad (27)$$

ゆえに、

$$\sqrt{1-w^2} = \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-v^2} - uv \quad (28)$$

$$w = u \sqrt{1-v^2} + v \sqrt{1-u^2} \quad (29)$$

ここで、

$$\sqrt{1-u^2} + iu = \cos \theta_u + i \sin \theta_u \quad (30)$$

$$\sqrt{1-v^2} + iv = \cos \theta_v + i \sin \theta_v \quad (31)$$

とおくと、

$$\sqrt{1-w^2} + iw = \cos \theta_w + i \sin \theta_w \quad (32)$$

$$= \cos(\theta_u + \theta_v) + i \sin(\theta_u + \theta_v) \quad (33)$$

となるので、(28) 式と (29) 式は、それぞれ、

$$\cos(\theta_u + \theta_v) = \cos \theta_u \cos \theta_v - \sin \theta_u \sin \theta_v \quad (34)$$

$$\sin(\theta_u + \theta_v) = \sin \theta_u \cos \theta_v + \cos \theta_u \sin \theta_v \quad (35)$$

となる。

(27) 式が、 $\theta_v = 2n\pi$ の場合にも成り立つものと仮定すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sin \theta_u} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{\sin(2n\pi)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\sin(\theta_u+2n\pi)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \theta_u + 2n\pi \end{aligned} \quad (36)$$

を得る。これは、

$$\int_0^{\sin(2n\pi)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = n \oint \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (37)$$

とおくと、(19) 式に一致する。