

# 置換群 (Permutation Group)

緑川章一\*

## 1 置換群

二行記法 (Cauchy's two-line notation) による表し方

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表す。

意味

$$\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \sigma(3) = i_3, \cdots, \sigma(n) = i_n$$

ゆえに、(1) 式は、たとえば、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & \cdots & n \\ i_3 & i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

と書くこともできる。

一般に、

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_k & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_k & \cdots & j_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

のとき、

$$\sigma(i_k) = j_k, \quad \sigma^{-1}(j_k) = i_k$$

逆置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

の逆置換は、

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

---

\*Shoichi Midorikawa

で与えられる。なぜなら、

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}(\sigma(1)) &= \sigma^{-1}(i_1) = 1, \\ \sigma^{-1}(\sigma(2)) &= \sigma^{-1}(i_2) = 2, \\ \sigma^{-1}(\sigma(3)) &= \sigma^{-1}(i_1) = 3, \\ &\vdots \\ \sigma^{-1}(\sigma(n)) &= \sigma^{-1}(i_n) = n\end{aligned}$$

恒等置換

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

置換の積 (例)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

とする。

ここでは、置換  $\sigma$  を施してから置換  $\tau$  を行う操作を  $\tau \circ \sigma$  と書くことにする。

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

## 2 マトリックス表現 (置換行列 (permutation marix))

マトリックス表現

置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{9}$$

の行列表現をおこなう。

まず、ベクトルを

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \sigma(3) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{10}$$

と定義し、(9) の置換  $\sigma$  を、各行および列に 1 をひとつずつ含み、他は全て 0 となる  $n \times n$  の行列  $P_\sigma$  を用いて、

$$\mathbf{v}_\sigma = P_\sigma \mathbf{v}$$

と表すことにする。

【例】 (4) の場合

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

また、 $\sigma$  の表現には不定性があり、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \cdots & \sigma(i_n) \end{pmatrix} \quad (12)$$

が成り立つ。このとき、

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}'_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(i_1) \\ \sigma(i_2) \\ \sigma(i_3) \\ \vdots \\ \sigma(i_n) \end{pmatrix} \quad (13)$$

とおく。

$$\mathbf{v}' = P' \mathbf{v}$$

ならば、

$$\mathbf{v}'_\sigma = P' \mathbf{v}_\sigma$$

が成り立つ。

【例】 (5) の場合

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

この例では、(11) から分かるように、 $P' = P_\sigma$  である。

## 置換の積

$$\begin{aligned}
 \tau \circ \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) & \cdots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) & \cdots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

そこで、

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \sigma(3) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_\tau = \begin{pmatrix} \tau(1) \\ \tau(2) \\ \tau(3) \\ \vdots \\ \tau(n) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{\tau \circ \sigma} = \begin{pmatrix} \tau(\sigma(1)) \\ \tau(\sigma(2)) \\ \tau(\sigma(3)) \\ \vdots \\ \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix} \quad (15)$$

とおくと、

$$\boldsymbol{v}_\sigma = \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{v} \quad (16)$$

$$\boldsymbol{v}_\tau = \mathbf{P}_\tau \boldsymbol{v} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{v}_{\tau \circ \sigma} = \mathbf{P}_{\tau \circ \sigma} \boldsymbol{v} \quad (18)$$

である。

また、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) & \cdots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix}$$

より、

$$\boldsymbol{v}_\sigma = \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{v} \quad (19)$$

となるので、

$$\boldsymbol{v}_{\tau \circ \sigma} = \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{v}_\tau \quad (20)$$

が成り立つ。

(20) に (17) を代入すると、

$$\boldsymbol{v}_{\tau \circ \sigma} = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{P}_\tau \boldsymbol{v}$$

を得る。この式と、(18) を比較して、

$$\mathbf{P}_{\tau \circ \sigma} = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{P}_\tau \quad (21)$$

を得る。

【例】  $\sigma$  と  $\tau$  が、各々 (4) と (5) で与えられている場合、それらの積  $\tau \circ \sigma$  は、(8) で与えられる。この時、

$$\begin{aligned} P_\sigma P_\tau &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= P_{\tau \circ \sigma} \end{aligned}$$

となり、確かに (21) は成り立つ。

### 3 置換行列-別の表し方

再び、(9) で与えられる置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad (22)$$

の置換行列を  $P_\sigma$  と書くことにすると、その  $(i, j)$  成分は、

$$(P_\sigma)_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$$

と表される。実際、(10) のベクトルを用いて以下の計算を行うと、

$$\begin{aligned} (P_\sigma \mathbf{v})_i &= \sum_{j=1}^n \delta_{\sigma(i),j} j \\ &= \sigma(i) \end{aligned}$$

となるので、

$$P_\sigma \mathbf{v} = \mathbf{v}_\sigma$$

が導かれる。

一方、 $P_\sigma$  の転置行列  $P_\sigma^T$  は、

$$(P_\sigma^T)_{i,j} = \delta_{i, \sigma(j)}$$

と表されるので

$$(P_\sigma^T \mathbf{v}_\sigma)_i = \sum_{j=1}^n \delta_{i, \sigma(j)} \sigma(j) \quad (23)$$

$$= i \quad (24)$$

ゆえに、

$$P_\sigma^T \mathbf{v}_\sigma = \mathbf{v} \quad (25)$$

また、

$$\begin{aligned} (P_\sigma P_\sigma^T)_{i,k} &= \sum_{j=1}^n (P_\sigma)_{i,j} (P_\sigma^T)_{j,k} \\ &= \sum_{j=1}^n \delta_{\sigma(i),j} \delta_{j, \sigma(k)} \\ &= \delta_{\sigma(i), \sigma(k)} \\ &= \delta_{i,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}_\sigma^T \mathbf{P}_\sigma)_{i,k} &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{P}_\sigma^T)_{i,j} (\mathbf{P}_\sigma)_{j,k} \\
&= \sum_{j=1}^n \delta_{i, \sigma(j)} \delta_{\sigma(j), k} \\
&= \delta_{i, k}
\end{aligned}$$

すなわち、

$$\mathbf{P}_\sigma \mathbf{P}_\sigma^T = \mathbf{P}_\sigma^T \mathbf{P}_\sigma = \mathbf{1}$$

ゆえに、

$$\mathbf{P}_\sigma^T = \mathbf{P}_\sigma^{-1} \quad (26)$$

が成り立つ。

また、(21) より、

$$\mathbf{P}_{\tau \circ \sigma}^T = \mathbf{P}_\tau^T \mathbf{P}_\sigma^T \quad (27)$$

となり、転置行列を用いると積の順序を二記法の場合と置換行列の場合で一致させることができる。

## 4 逆置換

$\mathbf{P}_\sigma$  の転置行列  $\mathbf{P}_\sigma^T$  は、

$$(\mathbf{P}_\sigma^T)_{i,j} = \delta_{i, \sigma(j)}$$

と表されるので

$$(\mathbf{P}_\sigma^T \mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^n \delta_{i, \sigma(j)} j \quad (28)$$

$$= \sigma^{-1}(i) \quad (29)$$

ゆえに、

$$\mathbf{P}_\sigma^T \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\sigma^{-1}} \quad (30)$$

ここで、

$$\mathbf{v}_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(1) \\ \sigma^{-1}(2) \\ \sigma^{-1}(3) \\ \vdots \\ \sigma^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

とおいた。

逆置換の表し方

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(k) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad (31)$$

とすると、

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(k) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (32)$$

ここで、 $\sigma(k) = j_k$  とおくと、 $k = \sigma^{-1}(j_k)$  だから、

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k & \cdots & j_n \\ \sigma^{-1}(j_1) & \sigma^{-1}(j_2) & \cdots & \sigma^{-1}(j_k) & \cdots & \sigma^{-1}(j_n) \end{pmatrix} \quad (33)$$

$j_1, j_2, \dots, j_n$  を  $1, 2, \dots, n$  の順に並び変えると、

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \cdots & \sigma^{-1}(k) & \cdots & \sigma^{-1}(n) \end{pmatrix} \quad (34)$$

を得る。これは、(31) の  $\sigma$  を  $\sigma^{-1}$  に置き換えたものに他ならない。

(34) の行列表現は、

$$P_{\sigma^{-1}} \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\sigma^{-1}}$$

である。この式と (26)、(30) を比較して、

$$P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma}^T = P_{\sigma}^{-1}$$

を得る。

例

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ の場合}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 $P_{\sigma}$  は、(11) で与えられるので、

$$P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。