留数定理を用いたガウス積分
— 対称的な積分経路 —

緑川　章一

1　オリジナルの積分経路

留数定理をガウス積分に応用する [1] ためには、図 1 に示したような長方形の積分経路に沿って関係式

$$f_a(z) - f_a(z+\tau) = e^{-z^2/2} \tag{1}$$

を満たす $f_a(z)$ が必要である。ここで、インデックス a は、非対称 (asymmetric) の a を表す。

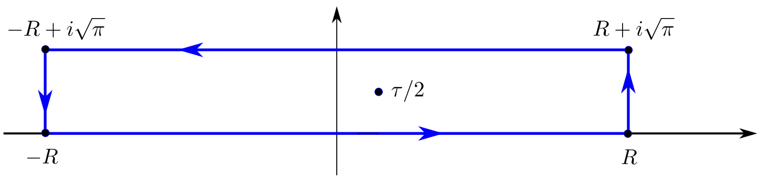

図 1: オリジナルの積分経路

私は Kneser の原著論文 [1] は読んでいない。参考文献に挙げた解説を読んだだけである。多分に証明方法などは原著とは異なっているかもしれないが、得られた結論は、当然のことながら原著の結果と同じである。

関数 $f_a(z)$ を以下の方法で決めよう。$f_a(z)$ は $e^{-z^2/2}$ に比例する考えるのは至極当然である。すなわち、

$$f_a(z) \propto e^{-z^2/2} \tag{2}$$

とすると、

$$f_a(z+\tau) \propto e^{-(z+\tau)^2/2} = e^{-\tau z} e^{-\tau^2/2} e^{-z^2/2}. \tag{3}$$

となるだろう。そこで、

$$f_a(z+\tau) = e^{-\tau z} e^{-\tau^2/2} f_a(z) \tag{4}$$

が成り立つと仮定しよう。そうして、 (1) と (4) を連立させて解くと、

$$
\begin{aligned}
f_a(z) &= \frac{e^{-z^2/2}}{1-e^{-\tau z}e^{-\tau^2/2}} && (5)\\
f_a(z+\tau) &= \frac{e^{-(z+\tau)^2/2}}{1-e^{-\tau z}e^{-\tau^2/2}} && (6)\\
&= \frac{e^{-z^2/2}e^{-\tau z}e^{-\tau^2/2}}{1-e^{-\tau z}e^{-\tau^2/2}} && (7)\\
&= -\frac{e^{-z^2/2}}{1-e^{\tau z}e^{\tau^2/2}} && (8)
\end{aligned}
$$

となる。 (5) 式を用いて $f_a(z+\tau)$ を求めると、

$$f_a(z+\tau) = \frac{e^{-(z+\tau)^2/2}}{1-e^{-\tau(z+\tau)}e^{-\tau^2/2}} \tag{9}$$

(9) 式と (6) は等しくなければならないので、

$$\frac{e^{-(z+\tau)^2/2}}{1-e^{-\tau z}e^{-\tau^2/2}} = \frac{e^{-(z+\tau)^2/2}}{1-e^{-\tau z}e^{-\tau^2}e^{-\tau^2/2}} \tag{10}$$

を得る。この式から which leads to

$$e^{\tau^2} = 1. \tag{11}$$

が導かれる。言いかえると、

$$\tau^2 = 2\pi i n \text{ for integer } n$$

である。最も簡単な解は、$n=1$ の場合である。すなわち、 $\tau^2 = 2\pi i$ なので、

$$\tau = \sqrt{2\pi}\, e^{\pi i/4} = \sqrt{\pi}(1+i).$$

このことから、関係式

$$e^{-\tau^2/2} = e^{-\pi i} = -1, \tag{12}$$

が導かれる。

関係式 (12) を用いると、(5) 式と (8) 式は、それぞれ、

$$
\begin{aligned}
f_a(z) &= \frac{e^{-z^2/2}}{1+e^{-\tau z}}, && (13)\\
f_a(z+\tau) &= -\frac{e^{-z^2/2}}{1+e^{\tau z}}. && (14)
\end{aligned}
$$

となる。実際、これらの式は (1) 式を満たす。

$$
\begin{aligned}
f_a(z) - f_a(z+\tau) &= \frac{e^{-z^2/2}}{1+e^{-\tau z}} + \frac{e^{-z^2/2}e^{-\tau z}}{1+e^{-\tau z}}\\
&= e^{-z^2/2}
\end{aligned}
$$

$1+e^{-\tau z}=0$ となるのは $\tau z=\pi i$ のときである。 $\tau^2=2\pi i$ だから $\tau z=\dfrac{\tau^2}{2}$. ゆえに $f_a(z)$ は $z=\dfrac{\tau}{2}$ に極を持つ。

$$\frac{d}{dz}(1+e^{-\tau z})\Big|_{z=\tau/2}=-\tau e^{-\tau^2/2}=\tau$$

だから $f_a(z)$ の $z=\tau/2$ における留数は、

$$\frac{e^{-\tau^2/8}}{\tau}=\frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt{2\pi}\,e^{\pi i/4}}=\frac{e^{-\pi i/2}}{\sqrt{2\pi}}=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}$$

ゆえに、

$$\oint f_a(z)\,dz=2\pi i\times\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \tag{15}$$

$R\to\infty$ のとき、 $|f(z)|$ は長方形の経路の左右で一様に 0 に近づくので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\,dx+\int_{\infty+i\sqrt{\pi}}^{-\infty+i\sqrt{\pi}} f_a(z)\,dz=\sqrt{2\pi}$$

となる。
ゆえに、

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\,dx-\int_{-\infty+i\sqrt{\pi}}^{\infty+i\sqrt{\pi}} f_a(z)\,dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\,dx-\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x+i\sqrt{\pi})\,dx \quad (z=x+i\sqrt{\pi}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\,dx-\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x-\sqrt{\pi}+\tau)\,dx \quad (\tau=\sqrt{\pi}+i\sqrt{\pi}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\,dx-\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x+\tau)\,dx \quad (x-\sqrt{\pi}\to x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_a(x)-f_a(x+\tau)\right)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx
\end{aligned}$$

が成り立ち、結局、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi} \tag{16}$$

を得る。

2 対称的な積分経路

今度は、対称的な (symmetric) 経路の場合に、以下の条件を満たす関数 $f_s(z)$

$$f_s\left(z-\frac{\tau}{2}\right)-f_s\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=e^{-z^2/2}$$

を求めよう。

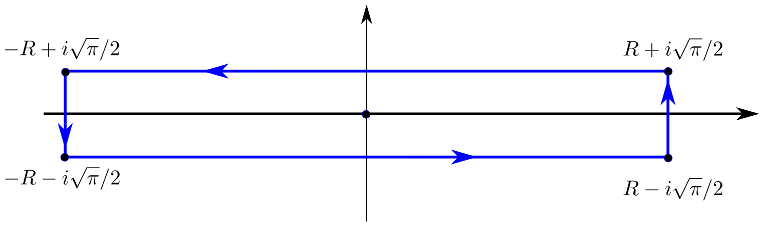

図 2: The Symmetric Path

この式を (1) 式

$$f_a(z)-f_a(z+\tau)=e^{-z^2/2}$$

と比較すると、

$$\begin{aligned} f_s\left(z-\frac{\tau}{2}\right) &= f_a(z)=\frac{e^{-z^2/2}}{1+e^{-\tau z}}, && (17)\\ f_s\left(z+\frac{\tau}{2}\right) &= f_a(z+\tau)=-\frac{e^{-z^2/2}}{1+e^{\tau z}}. && (18)\end{aligned}$$

となれば良いことが分かる。このことから、

$$f_s(z) = f_a\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=\frac{e^{-(z+\tau/2)^2/2}}{1+e^{-\tau(z+\tau/2)}}=\frac{e^{-(z+\tau/2)^2/2}}{1-e^{-\tau z}}$$

が導かれる。

$1-e^{-\tau z}=0$ となるのは、$\tau z=0$ のときなので、$f_s(z)$ は、$z=0$ に極を持つ。

$$\frac{d}{dz}(1-e^{-\tau z})\Big|_{z=0}=\tau e^{-\tau z}\Big|_{z=0}=\tau$$

となるので、 $z=0$ における $f_s(z)$ の留数は、

$$\frac{e^{-\tau^2/8}}{\tau}=\frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt{2\pi}\,e^{\pi i/4}}=\frac{e^{-\pi i/2}}{\sqrt{2\pi}}=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}$$

である。

ゆえに、

$$\oint f_s(z)\,dz = \sqrt{2\pi} \tag{19}$$

$R \to \infty$ のとき、 $|f(z)|$ は長方形の経路の左右で一様に 0 に近づくので、

$$\int_{-\infty-i\sqrt{\pi}/2}^{\infty-i\sqrt{\pi}/2} f_s(z)\,dz + \int_{\infty+i\sqrt{\pi}/2}^{-\infty+i\sqrt{\pi}/2} f_s(x)\,dx = 2\pi i \times \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} &= \int_{-\infty-i\sqrt{\pi}/2}^{\infty-i\sqrt{\pi}/2} f_s(z)\,dz - \int_{-\infty+i\sqrt{\pi}/2}^{\infty+i\sqrt{\pi}/2} f_s(z)\,dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_s\left(x - i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_s\left(x + i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\,dx \quad \left(z = x \mp i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_s\left(x + \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_s\left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\tau}{2}\right)\,dx \quad (\tau = \sqrt{\pi} + i\sqrt{\pi}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_s\left(x - \frac{\tau}{2}\right)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_s\left(x + \frac{\tau}{2}\right)\,dx \quad \left(x \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \to x\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_s\left(x - \frac{\tau}{2}\right) - f_s\left(x + \frac{\tau}{2}\right)\right)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx
\end{aligned}$$

が成り立ち、結局、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi} \tag{20}$$

を得る。

参考文献

[1] H. Kneser, Funktionentheorie, Vandenhoeck and Ruprecht, 1958.
For reviews, see
https://math.stackexchange.com/questions/34767/int-infty-infty-e-x2-dx-with-complex-analysis
Keith Conrad, "The Gaussian Integral"