ガンマ関数
(Gamma Function)

1　序論 (Introduction)

ガンマ関数の積分表示は、負の整数を除く任意の複素数 z に対して、

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx \tag{1}$$

で定義される。

この式に対し部分積分をおこなう。

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^\infty x^{z-1}\left(-e^{-x}\right)'\, dx \\ &= \left[-x^{z-1}e^{-x}\right]_0^\infty + (z-1)\int_0^\infty x^{z-2}e^{-x}\, dx\end{aligned}$$

この右辺第 1 項は、0 となるので、

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$$

を得る。

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

なので、z が正整数 n の場合には、

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 1$$

すなわち、

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

を得る。

2　オイラーの相反公式 (Euler's reflection formula)

$0 < s < 1$ として、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x_1^{s-1} e^{-x_1}\, dx_1$$

ここで、s を $1-s$ で置き換えると、

$$\Gamma(1-s)=\int_0^\infty x_2^{-s}e^{-x_2}\,dx_2$$

上記二つの式を掛けると、

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^\infty x_1^{s-1}e^{-x_1}\,dx_1\int_0^\infty x_2^{-s}e^{-x_2}\,dx_2 \qquad (2)\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{x_1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^s e^{-(x_1+x_2)}\,dx_1dx_2 \qquad (3)\end{aligned}$$

ここで、

$$x=\frac{x_1}{x_2},\qquad y=x_1+x_2 \qquad (4)$$

とおくと、$x_2=xx_1$ より、$y=x_2(x+1)$ すなわち、

$$\begin{aligned}x_1 &= xx_2=\frac{xy}{(x+1)} \qquad (5)\\ x_2 &= \frac{y}{x+1} \qquad (6)\end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{1}{x_1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^s e^{-(x_1+x_2)}=x^{s-1}(x+1)\frac{e^{-y}}{y}$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y}\\ \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{y}{(x+1)^2} & \frac{x}{x+1}\\ -\frac{y}{(x+1)^2} & \frac{1}{x+1}\end{vmatrix}=\frac{y}{(x+1)^2}$$

を得る。そこで、(3) 式の積分変数を x と y に変換すると、

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x+1}\,dx\int_0^\infty e^{-y}\,dy$$

となり、y についての積分は 1 となるので、結局、

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{x+1}\,dx \qquad (7)$$

を得る。

2.1 積分の評価　その 1

(6) 式の積分を求めるためには、実数の独立変数 x を複素変数に拡張する。$0<s<1$ の場合を考えているので、

$$f(z)=\frac{z^{s-1}}{z+1} \qquad (8)$$

とおくと、これは、多価関数である。図 1 のように、正の実軸上の点 A の座標を z とする。これが原点の周りを一回転して点 B に至ると、$e^{2\pi i}$ がかかって、$ze^{2\pi i}$ となる。

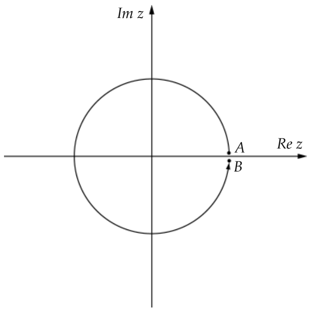

図 1: 複素平面における回転

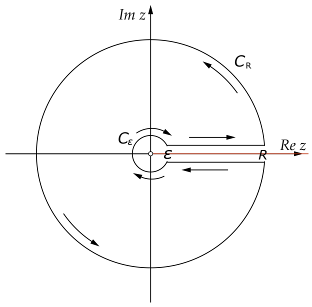

図 2: 複素積分の経路

そこで、関数の一意性を保つために図 2 のように正の実軸に沿って切断 (cut) を入れて、そこに描かれた平曲線に沿っての線積分 (contour integral) を考える。(8) 式の関数 $f(z)$ は、$z = -1 = e^{i\pi}$ に一次の極を持つので、留数定理を用いて (7) 式の積分を求めることができる。

$$\oint f(z)\, dz = 2\pi i e^{(s-1)\pi i} = 2\pi i e^{s\pi i} e^{-\pi i} = -2\pi e^{s\pi i}$$

ところが、

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0 \tag{9}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz = 0 \tag{10}$$

だから、$\varepsilon \to 0,\ R \to \infty$ の極限では、

$$\begin{aligned} -2\pi i e^{s\pi i} &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x+1}\, dx + \int_\infty^0 \frac{x^{s-1} e^{2\pi i(s-1)}}{x+1}\, dx \\ &= \left(1 - e^{2s\pi i}\right) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x+1}\, dx \end{aligned}$$

すなわち、

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x+1}\, dx = \frac{-2\pi i e^{s\pi i}}{1 - e^{2s\pi i}} \tag{11}$$

$$= \frac{2\pi i}{e^{s\pi i} - e^{-s\pi i}} \tag{12}$$

または、

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x+1}\, dx = \frac{\pi}{\sin s\pi} \tag{13}$$

を得る。したがって、

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi} \tag{14}$$

が成り立つ。

ここで、$s = 1/2$ とおくと、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

を得る。ガンマ関数の積分表示である (1) 式から、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\, dx = \sqrt{\pi}$$

を得る。この積分を変数 x の代わりに、$x = t^2$ とおいて t であらわすと、

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

とガウス積分の値が求まる。

2.2　積分の評価　その 2

「積分の評価　その 1」での計算方法では、切断面の上側と下側の積分の扱いが非対称であった。これは、切断面の上側の正の実軸を基準として採用したためであった。

両者を対称に扱うためには、負の実軸を基準に取ればよい。負の実軸上の点 C の座標を z とおき、$x = -|z|$ と定義すると $z = -x$ である。このとき、この点が時計回りに反回転して到達した正の実軸上の点 A には、$e^{-\pi i}$ がかかり $ze^{-\pi i}$ となり、$-z$ は $-ze^{-\pi i}$ となる。ところが、 $(-z)^{s-1}$ は、s が整数ではないので、$(-ze^{-\pi i})^{s-1} = x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}$ となる。

一方、反時計回りに回転して B に達した場合には、$-z$ に $e^{\pi i}$ がかかるので、$(-z)^{s-1}$ は、$(-ze^{-\pi i})^{s-1}$ $= x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}$ となる。

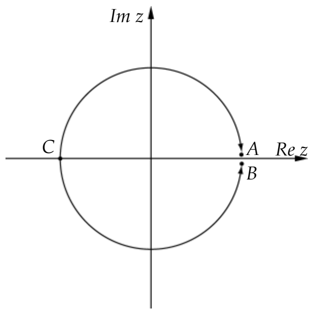

図 3: 複素平面における点 C の回転

そこで、関数

$$F(z) = \frac{(-z)^{s-1}}{z+1}$$

に対して、図 2 の線積分をおこなうと、この関数は、$z = -1$ に一次の極を持ち、その留数は 1 に等しいので、

$$\begin{aligned}
2\pi i &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}}{x+1}\, dx + \int_\infty^0 \frac{x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}}{x+1}\, dx && (15)\\
&= \left(e^{-(s-1)\pi i} - e^{(s-1)\pi i}\right) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x+1}\, dx && (16)\\
&= \left(e^{-s\pi i}e^{\pi i} - e^{s\pi i}e^{-\pi i}\right) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x+1}\, dx && (17)\\
&= \left(e^{s\pi i} - e^{-s\pi i}\right) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x+1}\, dx && (18)
\end{aligned}$$

となり、再び (12)、(13) 式、

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x+1}\,dx = \frac{2\pi i}{(e^{s\pi i} - e^{-s\pi i})} = \frac{\pi}{\sin s\pi}$$

を得る。

3　ベータ関数 (Beta Function)

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x}\,dx \tag{19}$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy \tag{20}$$

とおき、両者の積 $\Gamma(m)\Gamma(n)$ を考えよう。

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{m-1} y^{n-1} e^{-x-y}\,dx\,dy \tag{21}$$

ここで、

$$x + y = z, \qquad t = \frac{x}{z}$$

とおいて、(21) 式の積分を z と t の積分に書き直す。すると、

$$x = zt \tag{22}$$

$$y = z(1-t) \tag{23}$$

なので、

$$x^{m-1} y^{n-1} e^{-x-y} = z^{(m+n)-2} e^{-z}\, t^{m-1}(1-t)^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & t \\ -z & 1-t \end{vmatrix} = z$$

である。さらに、 $0 < z < \infty, \quad 0 < t < 1$ となるので、(21) 式は、

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty z^{(m+n)-1} e^{-z}\,dz \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt \tag{24}$$

$$= \Gamma(m+n) \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt \tag{25}$$

となる。(25) 式の積分を $B(m,n)$ で定義し、オイラーのベータ関数と呼ぶ。

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\ dt \tag{26}$$

あきらかに、

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

が成り立つ。