

巡回置換、互換、隣接互換

Cyclic Permutation, Transposition, and Adjacent Transposition

置換群のなかでも置換がサイクルをなすものを巡回置換 (cyclic permutation) と呼ぶ。この巡回置換を互換 (transposition) の積で表そう。

例として、

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix} \\ &\equiv (a b c d e)\end{aligned}\quad (1)$$

の場合を考えよう。

置換はあみだくじを用いて表すことができる。この時、2つの縦棒を結ぶ横棒が互換を表す。(1) 式をあみだくじを用いて表すと、例えば図 1 のようになる。

まず、互換 $(a b)$ を行い、次に $(a c)$ 、その次に $(a d)$ 、最後に $(a e)$ を行うと求める結果が得られる。置換を行う順序は、左から右に向かって順次行うことにすると、上記の操作は、

$$(a b c d e) = (a e)(a d)(a c)(a b)\quad (2)$$

と書くことができる。

巡回置換 (1) 式の互換の積による表し方は、(2) 式が唯一ではなく、何通りもの表現がある。そのうちの 하나가、図 2 の方法である。このとき、(1) 式は、

$$(a b c d e) = (a b)(b c)(c d)(d e)\quad (3)$$

となる。(3) 左辺の互換は、右辺の隣の文字同士の互換であることに注意しよう。このような互換を隣接互換 (adjacent transposition) という。このように、巡回置換は隣接互換の積で表すこともできる。

次に、互換 $(a e)$ を隣接互換の積で表そう。そのためには、図 2 の操作の後に図 3 の操作を行えば良い。すなわち、

$$(a e) = (e d c b)(a b c d e)\quad (4)$$

ここで、 $(a b c d e)$ については、(3) 式を用いる。また、図 3 から分かるように、

$$(e d c b) = (b c)(c d)(d e)\quad (5)$$

である。(3) 式と (5) 式を (4) 式に代入して、

$$(a e) = (b c)(c d)(d e)(a b)(b c)(c d)(d e)$$

を得る。このように、任意の互換は隣接互換の積で表すことができる。

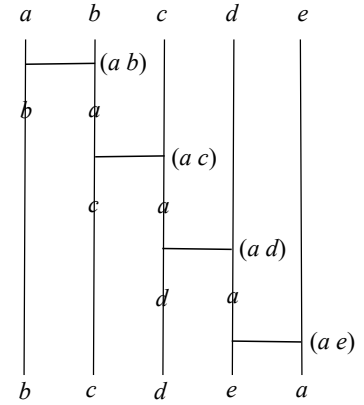


図 1

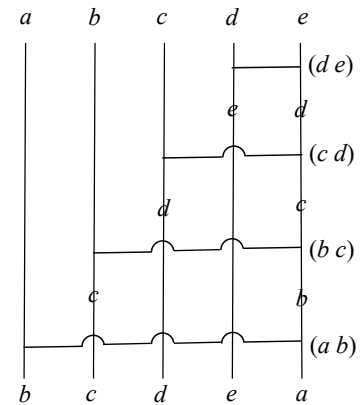


図 2

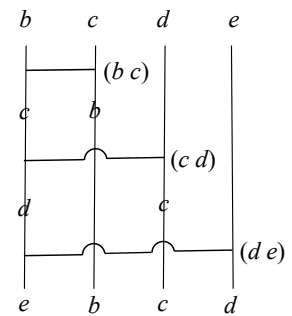


図 3