交代群 A_n は 3 サイクルで生成される

対称群 S_n は、n コの文字 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ の置換全体からなる群である。群の要素（元）の数は、$n!$ である。これらは互換の積で表すことができる。この中で偶数個の互換の積（偶置換）の集合の作る部分群が交代群 A_n で、その要素の数は $\dfrac{n!}{2}$ である。

全ての A_n の要素を用いて互換のペアを作ることができる。2 つのペアの積は、あみだくじを用いて図示すると、同じ数を含む場合（図 1）と全ての数が異なる場合 (図 2) の二通りがある。

交代群 A_n は、$n \geq 3$ の場合、3 サイクル（3 次巡回置換）で生成されることを示す。そのためには、互換の積は 3 サイクル（3 次巡回置換)、またはそれらの積で表されることを示せば十分である。置換の演算には、2 通りの流儀があるが、ここでは、置換 π_1 を施してから置換 π_2 を行う操作を $\pi_2\pi_1$ と書くことにしよう。

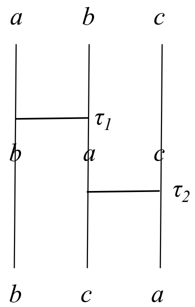

図 1: $\tau_2\tau_1$

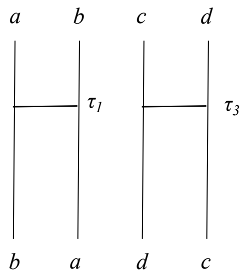

図 2: $\tau_3\tau_1$

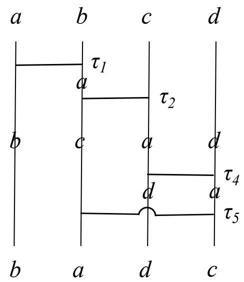

図 3: 図 2 の別の表し方

2 つの互換が同じ数 a を含む場合

2 つの互換を

$$\tau_1 = (a\ b), \quad \tau_2 = (a\ c) \tag{1}$$

とおこう。この時、

$$\begin{aligned} \tau_2\tau_1 &= (a\ c)(a\ b) \\ &= (a\ b\ c) \end{aligned}$$

2 つの互換が同じ数を含まない場合

この場合、$\tau_3 = (c\ d)$ とおいて $\tau_3\tau_1$ を調べよう。図 2 の結果は、図 3 においても再現できるので、

$$\begin{aligned} \tau_3\tau_1 &= \tau_5\tau_4\tau_2\tau_1 \\ &= (a\ c)(a\ d)(a\ c)(a\ b) \\ &= \big\{(a\ c)(a\ d)\big\}\big\{(a\ c)(a\ b)\big\} \\ &= (a\ d\ c)(a\ b\ c) \end{aligned}$$

$$\therefore\ (c\ d)(a\ b) = (a\ d\ c)(a\ b\ c)$$

以上により、全ての互換の積は 3 サイクル、または、3 サイクルの積で表されることが分かった。ゆえに、$n \geq 3$ の場合に全ての A_n は 3 サイクルから生成される。