確率変数の代数

Shoichi Midorikawa

1　確率分布

確率変数 X と Y は互いに独立であるとし、それらの確率分布を、それぞれ、$f_X(x)$ と $f_Y(y)$ で表す。ここで別の確率変数 Z を導入し、それは X と Y の関数で、

$$Z = \varphi(X, Y) \tag{1}$$

と表されるとしよう。すると、確率分布 $f_Z(z)$ は、

$$f_Z(z) = \int \delta(z - \varphi(x, y)) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

と表される。これは、

$$f_Z(z) \geq 0$$

と

$$\begin{aligned}
\int f_Z(z)\, dz &= \int \delta(z - \varphi(x, y)) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy\, dz \\
&= \int f_X(x)\, dx \int f_Y(y)\, dy \\
&= 1
\end{aligned}$$

とを満たすことに注意しよう。

(2) 式の x 積分は、デルタ関数 $\delta(z - \varphi(x, y))$ のおかげで、簡単に実行できる。そのためには、このデルタ関数を少し書き換える必要がある。$z = \varphi(x, y)$ を x について解く。その i 番目の解を α_i とする。当然のこのながら、α_i は y の z の関数である。もしも $|x - \alpha_i| \ll 1$ の場合には、x を α_i のまわりでテイラー展開することができ、一次の項までとると、

$$z - \varphi(x, y) \approx -\frac{\partial\varphi(\alpha_i, y)}{\partial x}(x - \alpha_i),$$

となるので、

$$\begin{aligned}
\delta(z - \varphi(x, y)) &= \sum_i \delta\left(\frac{\partial\varphi(\alpha_i, y)}{\partial x}(x - \alpha_i)\right) \\
&= \sum_i \frac{1}{|\partial\varphi(\alpha_i, y)/\partial x|}\delta(x - \alpha_i) \qquad (3)
\end{aligned}$$

と書き換えることが出来る。

(3) 式を (2) 式に代入すると、

$$f_Z(z) = \sum_i \int \frac{1}{|\partial\varphi(\alpha_i, y)/\partial x|} \delta(x - \alpha_i) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \tag{4}$$

となり、 x 積分を実行すると、

$$f_Z(z) = \sum_i \int \frac{1}{|\partial\varphi(\alpha_i, y)/\partial x|} f_X(\alpha_i) f_Y(y)\, dy \tag{5}$$

を得る。

2　確率変数の期待値

確率変数 x の関数 $\xi(X)$ の 分布 $F_X(x)$ における期待値は、

$$E[\xi(X)] = \int \xi(x) f_X(x)\, dx \tag{6}$$

で定義される。

2.1　$Z = \xi(X) + \eta(Y)$

確率変数 x の関数 $\xi(X)$ と確率変数 Y の関数 $\eta(Y)$ があるとしよう。さらに、別の確率変数 Z は、 $\xi(X)$ と $\eta(Y)$ の和で与えられるとする。

$$Z = \xi(X) + \eta(Y) \tag{7}$$

この時、Z の確率分布は、

$$f_Z(z) = \int \delta(z - \xi(x) - \eta(y)) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \tag{8}$$

となり、 Z の期待値は、

$$\begin{aligned}
E[Z] &= \int z f_Z(z)\, dz \\
&= \int z\, \delta(z - \xi(x) - \eta(y)) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy\, dz \\
&= \int (\xi(x) + \eta(y)) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \\
&= \int \xi(x) f_X(x)\, dx \int f_Y(y)\, dy + \int f_X(x)\, dx \int \eta(y) f_Y(y)\, dy \\
&= \int \xi(x) f_X(x)\, dx + \int \eta(y) f_Y(y)\, dy
\end{aligned}$$

と計算できるので、結果は、

$$E[\xi(X) + \eta(Y)] = E[\xi(X)] + E[\eta(Y)] \tag{9}$$

となる。

特別な場合として、

$$\xi(X) = aX, \quad \text{and} \quad \eta(Y) = bY. \tag{10}$$

の場合を考えよう。すると、(9) 式から

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]. \tag{11}$$

を得る。

2.2 $Z = \xi(X)\eta(Y)$

次に、 Z が $\xi(X)$ と $\eta(Y)$ の積

$$Z = \xi(X)\eta(Y) \tag{12}$$

で与えられる場合を考えよう。確率分布は、

$$f_Z(z) = \int \delta(z - \xi(x)\eta(y)) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \tag{13}$$

で与えられる。

確率変数 Z i¥の期待値は、

$$E[Z] = \int z f_Z(z)\, dz \tag{14}$$

$$= \int z\delta(z - \xi(x)\eta(y)) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy\, dz \tag{15}$$

$$= \int \xi(x) f_X(x)\, dx \cdot \int \eta(y) f_Y(y)\, dy \tag{16}$$

と計算されるので、最終結果は、

$$E[\xi(X)\eta(Y)] = E[\xi(X)] \cdot E[\eta(Y)] \tag{17}$$

となる。

特別な場合として、次の 2 つの場合を考えよう。

$\xi(X) = X$、 $\eta(Y) = Y$ の場合には、$Z = XY$ となり、

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] \tag{18}$$

を得る。

$\xi(X) = X$、 $\eta(Y) = 1/Y$ の場合には、$Z = X/Y$ となり、

$$E\left[\frac{X}{Y}\right] = E[X] \cdot E\left[\frac{1}{Y}\right] \tag{19}$$

を得る。

2.3 $Z = X^Y$

この場合には、

$$f_Z(z) = \int \delta(z - x^y) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \tag{20}$$

$$= \int \frac{1}{|y\, x^{y-1}|} \delta\left(x - z^{1/y}\right) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \tag{21}$$

ゆえに、

$$f_Z(z) = \int \frac{1}{|y\, z^{1-1/y}|} f_X\left(z^{1/y}\right) f_Y(y)\, dy \tag{22}$$

期待値は、

$$E[Z] = \int z f_Z(z)\, dz \tag{23}$$

$$= \int z\delta(z - x^y) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy\, dz \tag{24}$$

$$= \int x^y f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \tag{25}$$

$$= \int e^{y \ln x} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \tag{26}$$

$$= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n \ln^n x \right) f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \tag{27}$$

$$\therefore E[X^Y] = \int x^y f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \tag{28}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} E[\ln^n x] \cdot E[y^n] \tag{29}$$

3 分散

確率変数 X の分散は、次のように定義される。

$$\mathrm{Var}(X) = \int (x - E[X])^2 f_X(x)\, dx \tag{30}$$

これは、以下のように書き直すことができる。

$$\mathrm{Var}(X) = \int \left(x^2 - 2E[X]x + E[x]^2\right) f_X(x)\, dx \tag{31}$$

$$= \int x^2 f_X(x)\, dx - 2E[X] \int x f_X(x)\, dx + E[x]^2 \int f_X(x)\, dx \tag{32}$$

したがって、

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] \tag{33}$$
$$= E[X^2] - E[X]^2 \tag{34}$$

と書くことができる。

3.1 $Z = \xi(X) + \eta(Y)$

分散の定義は、

$$\mathrm{Var}(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 \tag{35}$$

であった。

ここで、$Z = \xi(X) + \eta(Y)$ の場合、

$$E[Z^2] = E\left[(\xi(X) + \eta(Y))^2\right] \tag{36}$$
$$= E[\xi(X)^2] + 2E[\xi(X)]E[\eta(Y)] + E[\eta(Y)]^2 \tag{37}$$

$$E[Z]^2 = E[\xi(X) + \eta(Y)]^2 \tag{38}$$
$$= (E[\xi(X)] + E[\eta(Y)])^2 \tag{39}$$
$$= E[\xi(X)]^2 + 2E[\xi(X)]E[\eta(Y)] + E[\eta(Y)]^2 \tag{40}$$

となるので、 (37) 式と (40) 式を (35) 式に代入して、

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(\xi(X)) + \mathrm{Var}(\eta(Y)) \tag{41}$$

を得る。

特別な場合として、$\xi(X) = aX$、 $\eta(Y) = bY$ とおくと、

$$\mathrm{Var}(Z) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) \tag{42}$$

を得る。

3.2 $Z = \xi(X)\eta(Y)$

ここでは、

$$Z = \xi(X)\eta(Y)$$

と置こう。その分散は、

$$\mathrm{Var}(Z) = \int (Z - E[Z])^2 f_Z(z)\, dz \tag{43}$$
$$= E[Z^2] - E[Z^2] \tag{44}$$

なので、

$$\mathrm{Var}(\xi(X)\eta(Y)) = E\left[\xi(X)^2\eta(Y)^2\right] - E[\xi(X)\eta(Y)]^2 \tag{45}$$

と書き直すことができる。ここで、

$$E\left[\xi(X)^2\eta(Y)^2\right] = E\left[\xi(X)^2\right]E\left[\eta(Y)^2\right] \tag{46}$$
$$E[\xi(X)\eta(Y)]^2 = E[\xi(X)]^2E[\eta(Y)]^2 \tag{47}$$

となるので、(46) 式と (47) 式を (44) 式に代入すると、

$$\mathrm{Var}(\xi(X)\eta(Y)) \tag{48}$$
$$= E\left[\xi(X)^2\right]E\left[\eta(Y)^2\right] - E[\xi(X)]^2E[\eta(Y)]^2 \tag{49}$$
$$\begin{aligned}&= \left\{E\left[\xi(X)^2\right] - E[\xi(X)]^2\right\}\left\{E\left[\eta(Y)^2\right] - E[\eta(Y)]^2\right\}\\ &\quad +E[\xi(X)]^2E\left[\eta(Y)^2\right] + E\left[\xi(X)^2\right]E[\eta(Y)]^2 - 2E[\xi(X)]^2E[\eta(Y)]^2\end{aligned} \tag{50}$$

となるので、結局、

$$\mathrm{Var}(\xi(X)\eta(Y)) = \mathrm{Var}(\xi(X))\mathrm{Var}(\eta(Y)) + E[\xi(X)]^2\mathrm{Var}(\eta(Y)) + \mathrm{Var}(\xi(X))E[\eta(Y)]^2 \tag{51}$$

を得る。これを行列を使って表すと、

$$\mathrm{Var}(\xi(X)\eta(Y)) = \begin{pmatrix}\mathrm{Var}(\xi(X)) & E[\xi(X)]^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{Var}(\eta(Y))\\ E[\eta(Y)]^2\end{pmatrix} \tag{52}$$

となる。

特に、

1. $\xi(X) = \eta(Y) = 1$ ならば、
   $E[\xi(X)] = E[\eta(Y)] = E[1] = 1.\ \ \mathrm{Var}(\xi(X)) = \mathrm{Var}(\eta(Y)) = \mathrm{Var}(1) = 0,$
   となるので、これらを (51) 式に代入すると、無矛盾な次式を得る。

   $$\mathrm{Var}(1\times 1) = \mathrm{Var}(1) = 0\times 0 + 1\times 0 + 0\times 1 = 0 \tag{53}$$

2. $\xi(X) = X,\ \eta(Y) = 1$ の場合には、

   $$E[\xi(X)] = E[X],\qquad \mathrm{Var}(\xi(X)) = \mathrm{Var}(X) \tag{54}$$
   $$E[\eta(Y)] = E[1] = 1, \mathrm{Var}(\eta(Y)) = \mathrm{Var}(1) = 0 \tag{55}$$

   なので、無矛盾な次式を得る。

   $$\mathrm{Var}(X\times 1) = \mathrm{Var}(X)\times 0 + E[X]^2\times 0 + \mathrm{Var}(X)\times 1 \tag{56}$$
   $$= \mathrm{Var}(X). \tag{57}$$

3. $\xi(X) = X,\ \eta(Y) = Y$ の場合には、

   $$E[\xi(X)] = E[X], \mathrm{Var}(\xi(X)) = \mathrm{Var}(X) \tag{58}$$
   $$E[\eta(Y)] = E[Y], \mathrm{Var}(\eta(Y)) = \mathrm{Var}(Y) \tag{59}$$

となり、次式を得る。

$$\mathrm{Var}(XY) = \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y) + E[X]^2\mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(X)E[Y]^2. \tag{60}$$

4. $\xi(X) = X,\ \eta(Y) = 1/Y$ の場合には、

$$E[\xi(X)] = E[X], \quad \mathrm{Var}(\xi(X)) = \mathrm{Var}(X) \tag{61}$$
$$E[\eta(Y)] = E[1/Y], \quad \mathrm{Var}(\eta(Y)) = \mathrm{Var}(1/Y) \tag{62}$$

となり、次式を得る。

$$\mathrm{Var}(X/Y) = \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(1/Y) + E[X]^2\mathrm{Var}(1/Y) + \mathrm{Var}(X)E[1/Y]^2. \tag{63}$$