

確率微分方程式メモ：伊藤積分と伊藤公式

@phykm

2018年7月12日

概要

[2]に沿って読みつつのメモ。[2]は厳密な測度論の議論はせず、確率微分方程式に親しみ、一定の計算を身に付けることを目的にしているが、正直なところ、省略された議論から「かんどころ」を把握するのは難しいと感じた。必要に応じてエクセンダール [1] や測度論的な確率論 ([4] など) を参照しつつ、その部分を補足するのが目的である。本稿は伊藤公式の導出までを見る。

1 ランダムウォークからブラウン運動（ウィーナー過程）へ

ランダムウォークを作ってみよう。 $\Omega = 2^{\mathbb{N}}$ に $\{\prod_{i=1}^n A_i \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} | n \in \mathbb{N}, A_i \in \{\{-1, 1\}, \{-1\}, \{1\}, \emptyset\}\}$ 、つまり有限ステップまで確定している事象から生成した可算加法族を考え、 $B_i : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$ を可測な射影として定める。 $P(\prod_{i=1}^n A_i \times 2^{\mathbb{N}}) = 2^{-\#\{i | A_i = \{-1\}, \{1\}\}}$ で確率測度を入れて、 $X_i = \sum_{j=1}^i B_j$ とすればこれがランダムウォークである。明らかに各 B_i は独立であるから、ある時刻区間の間の増分 $X_{i+k} - X_i$ たちは、区間が被らなければ独立であるし、平均は相殺してゼロ、分散は独立であるから増分の和にかけるので $\mathbb{V}[X_i] = i$ である。

ここからブラウン運動を構成するには、1ステップの時間間隔（今は1）と1ステップの変動幅を、「有意」な確率変数が最終的に得られるように、調節して小さくする「極限」をとる。

1ステップの時間幅を dt 、変動幅 dx とする。このとき、考えている連続時間確率過程は、ひとまずはランダムウォークと同じ確率空間をつかって、

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{i \leq t/dt} dx B_i \quad (1)$$

となる。 B_i の分散が1であって、これらは独立なので、 $W'(t)$ の分散は凡そ $dx^2(t/dt)$ 程度である事がわかる。分散がゼロに落ちて、発散しても、確率変数としてはつまらないものになるので、ある実数 σ があって、 $dx^2(t/dt) \rightarrow \sigma^2 t$ となるように、 $dx = \sigma \sqrt{dt}$ と制約をかけて「極限をとる」。しかし、こうは言ったところで、ブラウン運動を作ったことにはならない。この議論は、なんらかの手段で構成できる「であろう」ブラウン運動が「持つべき性質」はなにか、というのを探っているのである。この極限でえられる「であろう」確率過程を $W(t)$ とする。これはランダムウォークから構成したのだから、それからいくつかの性質を継承しているはずである。具体的には $W(t)$ には次のような性質が期待できる。

- 独立増分。つまり、 $W(t+s) - W(t)$ は、区間 $[t, t+s]$ が（端点を除き）被らない物同士は独立である。
- 定常増分。つまり、 $W(t+s) - W(t)$ は、押し出せば s によらない。
- $W(0) = 0$
- $W(t+s) - W(s)$ は平均ゼロ、分散 $\sigma^2 s$ の正規分布に従う。

最後のものは、分散を正規化した二項分布は正規分布に漸近する、というよく知られた中心極限定理によって動機づけられている。さて、直観的にはこのような確率過程が存在してほしいが、[1][2]はこのブラウン運動の構成については省略している。[3]の付録にはブラウン運動の構成例が記述されており、それは有理数時間上の実数ボレル集合の可算直積を経由するもので、直観に適う。^{*1}何れにせよ、上記の試論から期待される性質をもつ確率過程は存在する。

Definition 1.1. ブラウン運動とは、正実数上の、ほとんど確実に連続な確率過程で、定常増分かつ独立増分、 $W(0) = 0$ で、増分が平均ゼロ、分散 $\sigma^2 dt$ の正規分布であるものをいう。

なお [2] では、ガウス過程としての性質に着目した定義も与えられている。

Definition 1.2. ガウス過程とは、正実数上の確率過程で、任意の有限個の時刻の $W(t_i)$ を取り出したものを自由に線形結合したものが、適当なパラメータの正規分布に従うものをいう。

Definition 1.3. ブラウン運動とは、ガウス過程であって、初期値ゼロ： $W(0) = 0$ 、かつ、任意時刻の平均がゼロ： $\mathbb{E}[W(t)] = 0$ かつ、共分散 $\text{Cov}[W(t), W(s)] = \mathbb{E}[W(t)W(s)] = \sigma^2 \min\{s, t\}$ なものをいう。

Proposition 1.4. この二つは同値である。

Proof. \Rightarrow 以下で述べるような2時刻での積期待値に関する期待値の性質 $\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \sigma^2 \min\{s, t\}$ で示される。ガウス過程であることは、時間順序に並べて増分の形に書き換え、独立増分と、正規分布の再生性による。 \Leftarrow 共分散公式、および、多次元正規分布は共分散ゼロであれば独立になること、及びあとで示す $\mathbb{E}[(W(t) - W(s))^4] = 3(t - s)^2 \sigma^4$ と Kolmogorov 正規化定理より ([3] を参照)。

ここで、この確率変数が測度論的な意味で存在する、ということが何を意味するか指摘しておく。確率論は確率変数の像域事象に対して、対応する素事象空間の可測集合の測度を計算できるようになっているが、この時確率変数が $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ のように、素事象空間上の concrete な関数として表現されていることは重要である。測度論的確率論のこうした道具立てなしであっても、なんらかの物理的直観から、ある性質を持った観念的な「確率変数」を考えて議論することはできるだろう。しかしその振る舞いを仔細に検討しようとする、どうしてもその実体が欲しくなる。確率変数が、ある確率空間の底集合 Ω からの関数として表現されていることで、例えば $\omega \in \Omega$ ごとにそれがどのようなものか、といった性質を参照して議論することができる。

[2] の 1.2 章を読みすすめるための計算を見ていこう。

- 積について、 $t \geq s$ なら

$$\mathbb{E}[W(t)W(s)] \tag{2}$$

$$= \mathbb{E}[(W(t) - W(s))W(s) + W(s)^2] \tag{3}$$

$$= \mathbb{E}[W(t) - W(s)]\mathbb{E}[W(s)] + \sigma^2 s \tag{4}$$

$$= \sigma^2 s \tag{5}$$

^{*1} ブラウン運動の構成はいくつかある。

- 正規分布の計算は役に立つ。

$$\mathbb{E}[(W(t) - W(s))^4] \quad (6)$$

$$= \mathbb{E}[W(t-s)^4] \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi(t-s)}} \int x^4 \exp(-x^2/2(t-s)\sigma^2) dx \quad (8)$$

$$= \frac{(t-s)\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2\pi(t-s)}} ([x^3 \exp(-x^2/2(t-s)\sigma^2)]_{-\infty}^{\infty} - \int 3x^2 \exp(-x^2/2(t-s)\sigma^2) dx) \quad (9)$$

$$= - \frac{(t-s)\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2\pi(t-s)}} \int 3x^2 \exp(-x^2/2(t-s)\sigma^2) dx \quad (10)$$

$$= - \frac{(t-s)^2\sigma^4}{\sqrt{2\sigma^2\pi(t-s)}} ([3x \exp(-x^2/2(t-s)\sigma^2)]_{-\infty}^{\infty} - \int 3 \exp(-x^2/2(t-s)\sigma^2) dx) \quad (11)$$

$$= 3(t-s)^2\sigma^4 \quad (12)$$

- ブラウン運動の変動の二乗期待値（つまり分散）は $dt\sigma^2$ になるように作ったが、変動の二乗の分散、いわば分散の分散も計算できる。

$$\mathbb{V}[(W(t) - W(s))^2 - \sigma^2|t-s|] \quad (13)$$

$$= \mathbb{E}[((W(t) - W(s))^2 - \sigma^2|t-s|)^2] \quad (14)$$

$$= \mathbb{E}[(W(t) - W(s))^4] - 2\mathbb{E}[(W(t) - W(s))^2]|t-s|\sigma^2 + \sigma^4|t-s|^2 \quad (15)$$

$$= (3|t-s|^2 - 2|t-s|^2 + |t-s|^2)\sigma^4 \quad (16)$$

$$= 2|t-s|^2\sigma^4 \quad (17)$$

標準ブラウン運動の変換で標準ブラウン運動を作る。

Proposition 1.5. $W(t)$ が標準ブラウンであるとき、次もそうである。

$$1. X_1(t) = hW(t/h^2)$$

$$2. X_2(t) = W(t+h) - W(h)$$

$$3. X_3(t) = tW(1/t), X_3(0) = 0$$

$$4. X_4(t) = -W(t)$$

Proof. (1):時間をスケールしたものと思えばよい。

(2):定常増分なので。

(3):これはガウス過程としてのブラウン運動の定義を用いた方がよい。ガウス過程であることは明らか ($W(-)$ の引数を昇順にならねばよい)。共分散を計算すると、

$$\mathbb{E}[X_3(t)X_3(s)] = ts\min\{1/t, 1/s\} = \min\{t, s\} \quad (18)$$

(4):そもそも符号を変えても何も性質がかわらない。

ブラウン運動から得られる過程： $W(t)$ を標準ブラウンとする。

Definition 1.6. オルンシュタイン-ウーレンベック過程を $U(t) = \exp(-\mu t)W(\sigma^2 \exp(2\mu t)/2\mu)$ とする。

Definition 1.7. 対数正規過程を $X(t) = \exp(\sigma W(t))$ とする。

指数やんげ、と思うだろうが、確率密度関数から見ると対数である。

$$p_X(y) = \frac{\partial}{\partial y} \log y p_W(\log y) \quad (19)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t y}} \exp - \frac{(\log y)^2}{2\sigma^2 t} \quad (20)$$

Definition 1.8. ブラウン橋を、 $W(1) = 1$ 条件付き標準ブラウン運動とする。

ブラウン橋には他の定義もある。 $[0, 1]$ 上のガウス過程で、期待値ゼロ、 $\text{Cov}[X(s), X(t)] = s(1-t)$, ($s \leq t$) もブラウン橋である。また標準ブラウン $W(t)$ に対して、 $W(t) - tW(1)$, $(1-t)W(t/(1-t))$ はブラウン橋であることが知られている。^{*2}

2 伊藤積分

伊藤積分は、基本的なアイデアとしては、確率過程（とくにブラウン運動）による確率過程の（リーマン）スティルチェス積分である。ただし、どのような確率分布でもよいというわけではなく、被積分確率過程側は、「測度」確率過程側が適合しているフィルトレーションに従っていなければいけない。そのことは実際伊藤積分の定義に関わってくる。リーマン-スティルチェス積分が関数 f, g にたいして、

$$\int f dg = \lim_{\sup t_{i+1} - t_i \rightarrow 0} \sum_i f(s_i)(g(t_{i+1}) - g(t_i)), (s_i \in [t_i, t_{i+1})) \quad (21)$$

で定義するとき、 f, g がたちのよい関数であれば、これは区間代表点 s_i の選択によらず定義することができた。一方確率積分ではこのようなことが期待できない。その直観的理由は、ブラウン運動の増分 $dW(t)^2$ はオーダーとして dt 程度であり、 $o(dt)$ ではないためである。例えば被積分確率過程と積分測度側確率過程とともにブラウン運動をとったとき、区間代表点の選び方によって最大 $dW(t)^2$ 程度の差が生じるが、これが $o(dt)$ ではないために、和をとった時に無視できない差を生み出す。従って、確率過程のスティルチェス積分は、被積分確率過程の代表点を自由はとれない。これを常に左端にとったときのものが、伊藤積分にほかならない。

以下 $(\Omega, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, P)$ を標準ブラウン運動の確率空間、およびフィルトレーションとする。つまり、 \mathcal{F}_t は $\{W(s) | s \leq t\}$ で生成される（これらを可測にする最小の）可測集合族とする。同じ可測空間 (Ω, \mathcal{F}) の上で、伊藤積分の定義対象となる確率過程のクラスを定義する。

Definition 2.1. \mathcal{V} を、 $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ で次を満たすもののみとする。

- $(\Omega, \mathcal{F}) \times (\mathbb{R}_+, \mathcal{B})$ の直積可測空間上可測、つまり時間インデックスについても可測。
- ブラウン運動が \mathcal{H}_t マルチンゲール ($\mathbb{E}[W(t) | \mathcal{H}_s] = W(s)$, ($s \leq t$) をみたすこと) となるようなフィルトレーションがあって、 $f(-, t)$ は \mathcal{H}_t 可測 (つまり \mathcal{H} 適合)。
- t についていたるところ二乗可積分かつ期待値が有界: $\mathbb{E}[\int f^2 dt] < \infty$

^{*2} ここで、ある確率過程が「同じである」とは、確率過程を時間インデックスされた確率変数の組と見なして、そのうち任意有限個の組の押し出しが同じ確率空間を定義することと定めればよい。

ブラウン運動をマルチンゲールにするようなフィルトレーション \mathcal{H}_t は、 $\mathbb{E}[W(t)|\mathcal{H}_s] = W(s)$ が \mathcal{H}_s 可測かつ \mathcal{F}_t の定義から $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$ 、つまりブラウン運動の生成フィルトレーションに対して拡大になることに注意せよ。単に \mathcal{F}_t に適合、としたほうがシンプルかつ解釈も単純ではあるが、このほうが真に一般的がある。

[2] でも、またこれが参考にするエクセンダール [1] でも、伊藤積分の定義は確率空間の L^2 関数空間の上で、伊藤積分の定義が自明になるようなケースからはじめて定義を拡大するというやり方をとる。

Definition 2.2. $f \in \mathcal{V}$ が初等的であるとは、 $f(\omega, t) = \sum_i^n X_i(\omega)1_{[t_i, t_{i+1})}(t)$ と書けるものをいう。つまり、時間に対する依存性が単関数であるようなものとする。

初等的な \mathcal{V} の元についての伊藤積分の定義は明らかである。

Definition 2.3. 初等的な $f \in \mathcal{V}$ について、 $f(\omega, t) = \sum_i^n X_i(\omega)1_{[t_i, t_{i+1})}(t)$ なとき、伊藤積分を

$$\int f(-, t)dW(t) = \sum_i X_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad (22)$$

で定義する。

この定義から容易に確認できる以下の性質は、 $L^2(\Omega), L^2(\Omega, \mathbb{R}_+)$ での近似列を取ることによる定義の拡大で保たれる。

1. $\int -dW(t) : \mathcal{V} \rightarrow L^2(\Omega)$ は線形等長である。(\mathcal{V} のノルムは $L^2(\Omega, \mathbb{R}_+)$ で取るとする) 式で書けば

$$\mathbb{E}[(\int f(-, t)dW(t))^2] = \mathbb{E}[\int f^2(-, t)dt] \quad (23)$$

2. $\mathbb{E}[\int f(-, t)dW(t)] = 0$
3. $\int f(-, t)dW(t)$ は \mathcal{H}_t (f が適合するフィルトレーション) 可測である。
4. 乗法について期待値を保存する。

$$\mathbb{E}[\int f(-, t)g(-, t)dW(t)] = \mathbb{E}[\int f(-, t)dW(t) \int g(-, t)dW(t)] \quad (24)$$

3 は明らかだろう。2 については、 \mathcal{H}_t 条件つけ期待値を一旦とる操作をする。

$$\mathbb{E}[\sum_i X_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))] \quad (25)$$

$$= \sum_i \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))|\mathcal{H}_{t_i}]] \quad (26)$$

$$= \sum_i \mathbb{E}[X_i \mathbb{E}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))|\mathcal{H}_{t_i}]] \quad (27)$$

$$= \sum_i \mathbb{E}[X_i \cdot 0] \quad (28)$$

$$= 0 \quad (29)$$

1 の L^2 等長性は X_i が \mathcal{H}_{t_i} 可測かつブラウン運動がこれについてマルチンゲールであることを利用して次のように示す。

$$\mathbb{E}[(\sum_i X_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)))^2] \quad (30)$$

$$= \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j (W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j))] + \sum_i \mathbb{E}[X_i^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] \quad (31)$$

このうち、第二項が残ればよい。なぜなら独立増分であることから、

$$\mathbb{E}[X_i^2(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] \quad (32)$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i^2(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 | \mathcal{F}_{t_i}]] \quad (33)$$

$$= \mathbb{E}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \mathbb{E}[X_i^2 | \mathcal{F}_{t_i}]] \quad (34)$$

$$= \mathbb{E}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i^2 | \mathcal{F}_{t_i}]] \quad (35)$$

$$= \mathbb{E}[(t_{i+1} - t_i)X_i^2] \quad (36)$$

となり、これの和は初等的な f についての時間積分にほかならないため。

もとの式の第一項は $k = \max i, j$ として、 \mathcal{H}_k による条件付けを行えば、 $X(t_{k+1}) - X(t_k)$ 以外を吐き出すことができ、マルチンゲールからこの条件付き期待値はゼロなので全体がゼロに落ちる。4 もこれと全く同様であるが、初等的な f, g について示すためには、それぞれの時間についての単関数は細分をとればよい。

さて、 \mathcal{V} 上にこの伊藤積分の定義を拡大したい。 \mathcal{V} の位相を $L^2(\Omega, \mathbb{R}_+)$ で入れるとして、同一性もこれに基づくものとしよう。いま初等的な元についての等長性があるので、 $L^2(\Omega, \mathbb{R}_+)$ の意味で初等的元による近似列が取れていれば、伊藤積分の定義を拡大できることに注意せよ。

Proposition 2.4. $f \in \mathcal{V}$ に対して、 $L^2(\Omega, \mathbb{R}_+)$ ノルムに基づく初等的元による近似列 f_n がある。

Proof. 段階的に示す。 $\mathcal{V}''' \subset \mathcal{V}'' \subset \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ で、 \mathcal{V}''' を初等的、 \mathcal{V}'' を有界かつ $\omega \in \Omega$ pointwise 連続、 \mathcal{V}' を有界とする。これらの包含について、隣接する二者間で近似が取れれば、全体の包含についても近似が取れるので、隣接する二者の包含について近似列を構成できることを示せばいい。

- $\mathcal{V}''' \subset \mathcal{V}''$:

$\omega \in \Omega$ 各点で $f \in \mathcal{V}'''$ に対して $f_n(\omega, t) = \sum_i f(\omega, t_i) 1_{[t_i, t_{i+1})}$ とする。連続関数であるから、 dt を通常のリーマン積分のように、最大幅をゼロに落とす極限で、各点 $f_n \rightarrow f$ である。したがって有界収束から

$$\mathbb{E}[\int (f - f_n)^2 dt] \rightarrow 0 \quad (37)$$

- $\mathcal{V}'' \subset \mathcal{V}'$:

軟化子によるコンボリューションを考える。[1] によれば、具体的には $\text{supp} \phi_n \subset [-1/n, 0]$, $\int \phi_n = 1$, $\phi_n \geq 0$ な連続関数によるコンボリューションをとることで、 $\omega \in \Omega$ pointwise 可測関数を連続関数にできる。より正確には、このような処理がフィルトレーション適合可能性に反しないことや、また L^2 による収束性を確認しなければいけないが、ここでは省略する。 $\phi_n * f \rightarrow f$ が L^2 の意味で達成されることで近似ができる。

- $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$:

有界性を段階的に外すだけなので、値域の $[-n, n]$ 制限で近似すればよい。

定義だけではアレなので、計算例をもってくる。

Proposition 2.5.

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2} W(T)^2 - \frac{1}{2} T \quad (38)$$

Proof. 定義に沿って計算してみる。 $N(t) = W(t_i)$, $(t \in [t_i, t_{i+1}))$ とする。これは L^2 ノルムで $W(t)$ に漸近していくことが次のように示せる。

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{t_n} (N(t) - W(t))^2 dt\right] \quad (39)$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (W(t) - W(t_i))^2 dt\right] \quad (40)$$

$$= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}[(W(t) - W(t_i))^2] dt \quad (41)$$

$$= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) dt \quad (42)$$

$$= \sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 \quad (43)$$

この分割点は自由に選べたので、その間隔を小さく取ればこれはゼロに漸近する。したがって、このような $N(t)$ で考えている積分値の収束先に目処をつけられればよい。

$$\int N(t) dW(t) \quad (44)$$

$$= \sum_i W(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad (45)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2}(W(t_{i+1}) + W(t_i))(W(t_{i+1}) - W(t_i)) - \frac{1}{2}(W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad (46)$$

$$= \frac{1}{2}W(t_n)^2 - \sum_i \frac{1}{2}(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \quad (47)$$

ここで、この積分を $\frac{1}{2}W(t_n)^2 - \frac{1}{2}t_n$ と目処をつけておく。これとの差の二乗ノルムは

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}\sum_i ((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i))\right)^2\right] \quad (48)$$

だが、次のように評価すればこれは消える。

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}\sum_i ((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i))\right)^2\right] \quad (49)$$

$$\leq \sum_i \mathbb{E}\left[\left((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i)\right)^2\right] \quad (50)$$

$$\leq \sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 \quad (51)$$

ここで先の変動の分散についての計算を使っている。のこったこの項は t_i をうまく取れば小さくできるので、結局つぎが成り立つ。

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2}T \quad (52)$$

Proposition 2.6. $f(t)$ は確率過程ではなく、 t のリーマン二乗可積分関数であるとする。このとき、

$$\int_0^T f(t)dW(t) \quad (53)$$

は平均ゼロ、分散 $\int_0^T f(t)^2 dt$ の正規分布に従う。

Proof. 再び、 $f(t)$ を単関数近似する。 $L^2(\mathbb{R}_+)$ の中で単関数が稠密であるのでこれは可能である。特に個々の単関数を分割区間の特性関数の線形和とする。つまり、 $f' = \sum_i f_i 1_{[t_i, t_{i+1})}$ のようにする。 $f(t)$ の近似列を $L^2(\mathbb{R}_+)$ でとるとき、この区間分割の分割を細かくするように取れる。

$$\int f' dW(t) = \sum_i f_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad (54)$$

さてこの左辺のブラウン運動の増分はいずれも独立なので、これは平均ゼロ分散 $f_i^2(t_{i+1} - t_i)$ の正規分布の和である。正規分布の再生性^{*3}から、これは $\sum f_i^2(t_{i+1} - t_i)$ である。これは $\int f^2 dt$ に収束する。

Proposition 2.7. 可微分な f (時間の関数であり、 Ω 上の確率変数ではない) について、部分積分公式

$$\int_0^T f(t)dW(t) = f(T)W(T) - \int_0^T W(t)df \quad (55)$$

Proof. 時間を分割 (いつものように最大幅を小さくすることを想定している) して、

$$f(T)W(T) = \sum_i^n f(t_{i+1})W(t_{i+1}) - f(t_i)W(t_i) \quad (56)$$

$$= \sum_i^n f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + (f(t_{i+1}) - f(t_i))W(t_{i+1}) \quad (57)$$

とする。第一項の和について考える。 f は可微分、当然連続であり、特に単関数で L^2 の意味で近似でき、その伊藤積分はちょうどこの形をしている。したがって、時間分割を細かくする極限で、

$$\sum_i^n f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \int_0^T f(t)dW(t) \quad (58)$$

第二項の和について考える。 f の可微分性によって、 $f(t+dt) - f(t) = dt f'(t+dt) + o(dt)$ とできるので、

$$\sum_i (f(t_{i+1}) - f(t_i))W(t_{i+1}) = \sum_i f'(t_{i+1})W(t_{i+1})(t_{i+1} - t_i) + o(t_{i+1} - t_i) \quad (59)$$

積分区間が有界であるので、第二項は消えて、第一項は、 $\omega \in \Omega$ の各点の積分と思えば^{*4}

$$\int_0^T W(t)df = \int_0^T f'W(t)dt \quad (60)$$

である。

伊藤積分の定義を初等的な確率過程から拡大するにあたって重要な性質は、等長性である。初等的関数の伊藤積分の等長性は独立増分と、分散 $= \sigma^2$ からきていたがこれはかなり強い性質である。実際、伊藤積分は、ブラウン運動ではなく、連続マルチンゲールに対して定義する事もできる。この場合は単なる時間積分ではなく、二次変分過程を使って確率過程の「大きさ」を測る。

^{*3} 独立正規分布の和は期待値と分散における和になる。

^{*4} ブラウン運動はいたるところ連続である。この手の時間についての通常の積分も以下断りなく実行する。

3 伊藤過程と伊藤公式

表記上の注意をする。確率過程たちについて

$$dX(t) = Y(t)dt + Z(t)dW(t) \quad (61)$$

のような、 t ないし確率過程についての $d(-)$ の、確率過程についての同時線形結合による式を、次の意味で解釈するとする。つまり、以下の略記であるとする。ある確率変数 $X(0)$ があって、

$$X(t) = X(0) + \int_0^t Y(s)ds + \int_0^t Z(s)dW(s) \quad (62)$$

このときの3項目は伊藤積分であるように X, Y, Z, W が適当な適合性を満たしているとする。以下ではこの記法における確率過程の「微分」は本質的には Brown 運動 dW とただの時間 dt の線形結合しか出てこない。

本節で述べられる伊藤の公式とは、あるクラスの確率過程を、2階可微分関数で変換して得られる確率過程を、同じクラスの確率過程として再び書き下すものである。その「あるクラス」とは、そのまま伊藤過程と呼ばれる次のものである。

Definition 3.1. 伊藤過程とは、ブラウン運動 $W(t)$ 、および $W(t)$ をマルチンゲールとするフィルトレーションに適合する確率過程 $\mu(t), \sigma(t)$ で $\omega \in \Omega$ いたるところ $\mu(\omega)(-) \in L^1(\mathbb{R}_+), \sigma(\omega)(-) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ なものを用いて

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s) \quad (63)$$

と書かれるものこととする。積分の線形性から、これは線形空間をなす。先の記法ではこれを

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \quad (64)$$

と書く。

Proposition 3.2. 伊藤過程はほとんど確実に連続な確率過程である。

Proof.

$$X(t+dt) - X(t) = \int_t^{t+dt} \mu(s)ds + \int_t^{t+dt} \sigma(s)dW(s) \quad (65)$$

を ω pointwise に評価すればいい。 $\mu(s)$ はいたるところ L^1 関数なのだから、

$$\left| \int_t^{t+dt} \mu(s)ds \right| \leq \int_t^{t+dt} |\mu(s)|dt \rightarrow 0 \quad (66)$$

また伊藤積分の項は等長性によって

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_t^{t+dt} \sigma dW(s) \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_t^{t+dt} \sigma(s)^2 ds \right] \rightarrow 0 \quad (67)$$

となり、いたるところ連続となる。

伊藤の公式とは次である。

Theorem 3.3. $F(-, -) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ を C^2 級とする。伊藤過程

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \quad (68)$$

すなわち、

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s) \quad (69)$$

に対して、確率過程 $F(X(t), t)$ は、次の伊藤過程である。

$$dF(X(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t}(X(t), t)dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X(t), t)\sigma(t)^2 dt + \frac{\partial F}{\partial x}(X(t), t)dX(t) \quad (70)$$

ここで、最後の $\frac{\partial F}{\partial x}(X(t), t)dX(t)$ は

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X(t), t)\mu(t)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(X(t), t)\sigma(t)dW(t) \quad (71)$$

のことである。以下でも伊藤過程による dX 表記は、このように分解したものを常に考えるとする。

証明の前に、この定理の意味するところを考えてみよう。もし $X(t)$ が単なる時間の関数であれば、 $F(X(t), t)$ を微分するのみであり、二階微分項は不要である。単なる関数のときとの違いは、確率的ゆらぎが、この $F(X(t), t)$ の t に対するテイラー展開の序列を乱す点にある。 dt によって二次まで展開したとしよう。このとき、 dW についても二次まで考察することになるが、これまで見たように、 dW の二次は dt 一次程度の大きさを持ってしまう。したがって、 $dt^2, dt dW$ は $o(dt)$ として消えても、 dW^2 だけは dt 程度の大きさをもって残ってしまう。その補正項が F の二階微分項として出てきていると考えることができる。

Proof. 本質的には、 $F(X(t), t)$ のテイラー展開である。伊藤積分を定義したときのように、 μ, σ を ω pointwise にほとんど確実に単純関数からはじめ、一般の μ, σ についてはこれを用いてそれぞれ L^1, L^2 の意味で近似することで示す。ここで再び「単純な」関数を、次の「初等的」なものとする。すなわち、 μ, σ が初等的とは、ほとんど確実に L^1, L^2 の元であり、かつ時間依存性が有限個の時間 t_i を用いて $\mu(\omega, t) = \sum_i X_i(\omega) 1_{[t_i, t_{i+1})}(t) \sigma(\omega, t) = \sum_i Y_i(\omega) 1_{[t_i, t_{i+1})}(t)$ のように書けるものとする。あきらかにこれは、ほとんど確実に ω pointwise) (1,2 乗) リーマン可積分であることに注意。

$\omega \in \Omega$ を固定すれば、 $X(t)$ も連続になるので、時間幅 dt について $dX = X(t + dt) - X(t)$ も微小になる。この $dt, dX = \mu dt + \sigma dW$ についての二次までのテイラー展開を考える。

$$F(X + dX, t + dt) - F(X, t) \quad (72)$$

$$= (\partial_x F) \mu dt + (\partial_x F) \sigma dW + (\partial_t F) dt \quad (73)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[(\partial_t^2 \tilde{F}) dt^2 + (\partial_x^2 \tilde{F}) \mu^2 dt^2 + (\partial_x \partial_t \tilde{F}) \mu dt^2 \right] \quad (74)$$

$$+ (\partial_x^2 \tilde{F}) \sigma^2 dW^2 \quad (75)$$

$$+ (\partial_x^2 \tilde{F}) \mu \sigma dt dW + \partial_t \partial_x \tilde{F} \sigma dt dW \quad (76)$$

ここで、 F は $F(X, t)$ の引数を省略している。 \tilde{F} は、テイラー展開の二次残差項で $\tilde{F}(X + \theta dX, t + \theta' dt)$, ($\theta, \theta' \in [0, 1]$) の略である。

示したい公式は

$$dF = (\partial_t F) dt + \frac{1}{2} (\partial_x^2 F) \sigma^2 dt + (\partial_x F) \mu dt + (\partial_x F) \sigma dW \quad (77)$$

すなわち、

$$F(X(t), t) - F(0) = \int_0^t \left((\partial_t F) + \frac{1}{2} (\partial_x^2 F) \sigma^2 + (\partial_x F) \mu \right) ds + \int_0^t (\partial_x F) \sigma dW \quad (78)$$

であるから、時間区間 $[0, T]$ を分割して、各微小区間ごとに (72) の展開式を足し上げたときに、これに一致することを示せばよい。

(73) の通常の積分部分は、時間分割の細分極限で ω pointwise に

$$\sum_i (\partial_x F_i) \mu dt_i + (\partial_t F_i) dt_i \rightarrow \int_0^t ((\partial_t F) + (\partial_x F) \mu) ds \quad (79)$$

となる。また、伊藤積分の部分は、 $(\partial_x F)$ を、時間分割について細分になるような初等的な確率過程で近似すれば

$$\sum_i (\partial_x F_i) \sigma dW_i \rightarrow \int_0^t (\partial_x F) \sigma dW \quad (80)$$

が L^2 の意味で従う。

(74) は、 dt^2 以外の係数は、コンパクト区間上の連続関数であるから、ほとんど確実に有界にバウンドされている。したがって、 $dt_i = t_i - t_{i-1}$ を小さくする極限で

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \rightarrow 0 \quad (81)$$

であるから (74) の総和は細分極限でゼロになる。

(75) について、 L^2 の意味で

$$\sum_i (\partial_x^2 \tilde{F}_i) \sigma_i^2 dW_i^2 \rightarrow \int_0^t (\partial_x^2 F) \sigma^2 ds \quad (82)$$

となることを示そう。

$$\left\| \sum_i (\partial_x^2 \tilde{F}_i) \sigma_i^2 dW_i^2 - \int_0^t (\partial_x^2 F) \sigma^2 ds \right\|_{L^2} \quad (83)$$

$$\leq \left\| \sum_i (\partial_x^2 \tilde{F}_i) \sigma_i^2 dW_i^2 - \sum_i (\partial_x^2 \tilde{F}_i) \sigma_i^2 dt_i \right\|_{L^2} \quad (84)$$

$$+ \left\| \sum_i (\partial_x^2 \tilde{F}_i) \sigma_i^2 dt_i - \sum_i (\partial_x^2 F_i) \sigma_i^2 dt_i \right\|_{L^2} \quad (85)$$

$$+ \left\| \sum_i (\partial_x^2 F_i) \sigma_i^2 dt_i - \int_0^t (\partial_x^2 F) \sigma^2 ds \right\|_{L^2} \quad (86)$$

(85) は $[0, t]$ での $\partial_x^2 \tilde{F}, \partial_x^2 F$ の一様連続性と、時間分割細分極限によって、(86) はリーマン可積分性によって

ゼロに収束する。(84) は

$$\left\| \sum_i (\partial_x^2 \tilde{F}_i) \sigma_i^2 (dW_i^2 - dt_i) \right\|_{L^2}^2 \quad (87)$$

$$= \sum_{i,j} \mathbb{E}[(\partial_x^2 \tilde{F}_i) \sigma_i^2 (\partial_x^2 \tilde{F}_j) \sigma_j^2 (dW_i^2 - dt_i)(dW_j^2 - dt_j)] \quad (88)$$

$$= \sum_i \mathbb{E}[(\partial_x^2 \tilde{F}_i)^2 \sigma_i^4 (dW_i^2 - dt_i)^2] \quad (89)$$

$$= \sum_i \mathbb{E}[(\partial_x^2 \tilde{F}_i)^2 \sigma_i^4] \mathbb{E}[(dW_i^2 - dt_i)^2] \quad (90)$$

$$= \sum_i \mathbb{E}[(\partial_x^2 \tilde{F}_i)^2 \sigma_i^4] 2dt_i^2 \quad (91)$$

となり、 $\mathbb{E}[(\partial_x^2 \tilde{F}_i)^2 \sigma_i^4]$ が有界とすれば $\sum_i dt_i^2$ は細分極限でゼロに収束する。途中、ブラウン運動の独立増分性を用いている。

4 中断の言い訳

伊藤公式は、しばし簡易には次の算法で「計算」される。

$$dtdt = 0 \quad (92)$$

$$dWdW = dt \quad (93)$$

$$dWdt = 0 \quad (94)$$

実際、 $d(-)$ による簡易な無限小量の算法で、以上の規則を適用すれば、伊藤の公式は本当に単なるテイラー展開である。本稿ではブラウン運動による伊藤積分を考えたが、実際には連続マルチンゲールに対して伊藤積分が定義でき、このときは連続マルチンゲールで確率過程を積分すると、あらたなマルチンゲールが得られる。また、一般の連続マルチンゲール過程での伊藤公式の算法は

$$dtdt = 0 \quad (95)$$

$$dM_i dM_j = d\langle M_i, M_j \rangle \quad (96)$$

$$dMdt = 0 \quad (97)$$

である。ここで $\langle M_i, M_j \rangle$ は、確率過程の「導関数の L^2 内積」のようなもので、二次変分過程と呼ばれる。ブラウン運動の場合は t であったが^{*5}、一般のマルチンゲールについては確率過程になりえる。それは局所有界変動なので、二次変分過程についての積分は伊藤積分ではなく通常の各点のルベーグスティルチェス積分で間に合う（もともと伊藤積分に特別な配慮が必要だったのは、測度側の確率過程が有界変動でないという性質からであった）。有界変動過程の微小量については、通常の微小量と同様に高次のはゼロである。このように、確率積分の理論は、マルチンゲール過程と有界変動過程がうまく交差するための自然な語法を備えている…ようである。

本稿は筆者の学習に合わせてもう少し続きを書いてみる予定だったが、[2] の補完をするために確率過程論/確率微分方程式の教科書を漁るうちに、当初の想定を遥かに超える確率過程理論の広大さ（の予感）に圧倒されてしまったため、これ以上の執筆は筆者の未熟さが露呈するだけならまだしも、稚拙な記述を広めてしまうことになりかねないので、本稿は一旦ここで中断とします。続きはまたいずれ…。

^{*5} なぜ定数になるかという、ランダムウォークを思い出してほしい。ランダムウォークの1ステップの幅はどちらに動くかによらず1であった。

参考文献

- [1] B. エクセンドール 確率微分方程式 シュプリンガー・ジャパン (2012)
- [2] 石村直之 確率微分方程式入門-数理ファイナンスへの応用- 共立出版 (2014)
- [3] 舟木直久 確率微分方程式 岩波書店 (2005)
- [4] 舟木直久 確率論 朝倉書店 数学の考え方 (2004)