プランク定数再考

松久　勝彦

moi. corp. /元 KEK 筒井研究室 (∼2018)

2022/02/28

自己紹介？

- 東工大 1 類物理学科 (2009∼2012)
  - 場の量子化の議論で発狂する
- 東大院理物/KEK 筒井研究室 (2013 ∼2018)
  - 色々勉強して過ごすも論文が書けず満期退学
- moi. corp. エンジニア職 (2019∼)
  - 日曜物理学徒へ...

プランク定数

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} [\mathsf{m}^2\,\mathsf{kg}^1\,\mathsf{s}^{-1}]$$
$$\hbar = 1.054571817 \times 10^{-34} [\mathsf{m}^2\,\mathsf{kg}^1\,\mathsf{s}^{-1}]$$

プランク定数の現れる場所

プランク放射公式/エネルギー量子

$$u(\nu, T) \propto \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{1}$$

$$E = h\nu \tag{2}$$

ド・ブロイ波長

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{3}$$

質点粒子の運動量

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{4}$$

Intro
プランク定数
量子力学の公理
古典力学 calib.
解析力学速習
ラグランジアンの不正性
熱力学では
大域 calib.
Hybrid System
要件
AG/BT 括弧
Q-C Calib. の具体計算
AG/BT の問題点
終わりに

プランク定数の現れる場所

質点系シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}\right)\phi \tag{5}$$

量子化 (?)

$$\hat{A}, \hat{B} \leftrightarrow A(q,p), B(q,p) \tag{6}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]/i\hbar \leftrightarrow \{A(q,p), B(q,p)\} \tag{7}$$

経路積分

$$\langle z \mid y\rangle \propto \int_{x(t_1)=z,x(t_0)=y} \mathcal{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt L(x(t))\right) \tag{8}$$

SI 単位系では...

SI 単位系での物理定数の扱い

- 光速：$2.99792458 \times 10^{8} [\mathrm{m}^1 \mathrm{s}^{-1}]$ の定義値
- プランク定数：$6.62607015 \times 10^{-34} [\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^{-1}]$ の定義値

自然界が決めていると信じられているので、
人間が勝手に値を決め打つことで、
kg, m, s の原器として使っている。
あと一つ kg, m, s からなる観測値があれば決まる
(セシウムの遷移周波数 s^{-1} を使う)

プランク定数の解釈

プランク定数とは…

- “量子論を特徴付ける物理定数である。” (wikipedia)
- “量子力学の基本定数の一つ” (天文学辞典)

例えば、$\hbar \to 0$ で「量子性が消える」と信じられている。

- 経路積分 $\to$ 最小作用

$$\exp(i\hbar^{-1}S) \to \delta S = 0 \tag{9}$$

- 不確定性関係 $\to$ 消滅

$$\Delta A \Delta B \sim \hbar \to 0 \tag{10}$$

いわゆる古典極限。

プランク定数の解釈

- "量子論を特徴付ける物理定数である。" (wikipedia)
- "量子力学の基本定数の一つ" (天文学辞典)

本当にそうか？

一方量子力学では...

量子力学の定式化や公理を見ると...

- 系 $\leftrightarrow$ ヒルベルト空間
- 可換測量 $\leftrightarrow$ 自己共役作用素
- $P_A(X) = \langle \phi \,|\, E_A(X)\phi \rangle$
- 事後状態：射影仮説
- 時間発展：シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{H}\phi \tag{11}$$

一般論では、シュレディンガー方程式しかプランク定数に言及していない。

一方量子力学では...

そもそも次の Stone の定理があるので、実はこれも要らない。

Theorem

1 パラメータユニタリ群 $\hat{U}(t)$ は、自己共役生成子を持つ。

$$\hat{U}(t) = \exp(it\hat{H}) \tag{12}$$

こう書いた時は、$\hat{H}$ の次元は時間の逆数。

なんでハミルトニアンにプランク定数をかけるのか？

$$\hat{U}(t) = \exp(it\hat{H}) = \exp(it\hbar^{-1}\hbar\hat{H}) \leftarrow \text{余計？} \tag{13}$$

実のところいつプランク定数が必要になるのか？

プランク定数の解釈

今日やること：プランク定数とは...

- “~~量子論を~~古典論を特徴付ける物理定数である。”(かも...)
- “~~量子力学の~~古典力学の基本定数の一つ”(かも...)

という話をする。(でも “特徴づける” って何...？)

→ とっても素朴な例から考えて、プランク定数を決定することを考える。

※ 最先端の話はしません

解析力学速習

解析力学 (ラグランジュ/ハミルトン) の大まかな流れを復習：

- 系の配位自由度：$q \in N$(適当な多様体)
- 相空間：$(q, v) \in TN$(速度の情報が加わる)
- ラグランジアン：$L : TN \to \mathbb{R}$
- 運動方程式：最小作用

$$\delta \int L dt = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{14}$$

オイラー・ラグランジュ方程式が系の運動方程式になるようにラグランジアンを設計する。

解析力学速習

ネーターモーメントとネーターの定理：

- 1 パラメータ変換 $\phi : (-a, a) \to (N \to N)$
- の生成ベクトル場 $X = X^i \partial_i$ $(\exp(tX) = \phi(t))$

$$M_X = X^i \frac{\partial L}{\partial v^i} \tag{15}$$

とすると、L が不変 $\mathcal{L}_X L = 0$(リー微分) なら保存量。

$$\mathcal{L}_X L = \mathbb{EL}_i X^i + \frac{d}{dt} M_X \tag{16}$$

$$\mathbb{EL}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} \tag{17}$$

ネーターモーメントは、保存しない時であっても、
系の典型的な物理量を与える。

解析力学速習

ハミルトン系 (今回は特異/拘束系は考えません)：

- $p^i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$ によって $TN \simeq T^*N$
- ハミルトニアン $H = pq - L$
- Symp. 形式 $\omega = dp^i \wedge dq^i = \Omega_{ij} dz^i \wedge dz^j$
- ポアソン括弧

$$\{A, B\} = \Omega^{-1,ij} \frac{\partial A}{\partial z^i} \frac{\partial B}{\partial z^j} \tag{18}$$

$$= \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i} \frac{\partial B}{\partial q^i} \tag{19}$$

運動の生成子 (通常は H) に対する量 A の発展

$$\frac{dA}{dt} = \{H, A\} \tag{20}$$

逆に、状態 (確率密度関数) の発展 (リウヴィル方程式)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\{H, \rho\} \tag{21}$$

解析力学速習

ちなみに、N に G が作用しているとき、G のリー代数の基底ごとのネーターモーメントの、ハミルトン形式 T^*N への引き戻しは、G の作用を T^*N に拡張したものの生成子になり、ポアソン括弧に G のリー代数が表現される。

$\downarrow$

対称性の代数的議論がポアソン括弧に引き継がれる。

$$a, b \in \mathfrak{g} \mapsto M_a, M_b \tag{22}$$

$$[a, b] \mapsto \{M_a, M_b\} \tag{23}$$

さて...

ラグランジアンには不定性がある。
よく言われるもの：時間全微分

$$L(q,v) \leftrightarrow L(q,v) + \frac{df}{dt}(q) \tag{24}$$

今日問題にしたいもの：全体係数

$$L(q,v) \leftrightarrow \lambda L(q,v) \tag{25}$$

「えっ、(運動項)-(ポテンシャル) とかでしょ」という方、

ニュートン力学を一旦すべて忘れてください。
ストイックに最小作用 $\delta S = 0$ だけで考えましょう。

~~なんとなく今日の話の察しが付いたでしょうか...~~

ラグランジアン不定性

虚心坦懐に最小作用だけを指導原理として認めるなら、ラグランジアンの次元もその係数も任意である。最小化されることが目的の量の次元や絶対大きさなど誰も気にしない。保存則が成り立っても、保存するからこそその次元や係数などやはりどうでもよい。

$\downarrow$

古典解析力学は系ごとに不定係数をもつ理論である。

まずはこのことを受け入れる。

Q. この不定性は何か問題を引き起こすだろうか？

$\rightarrow$ A.YES。しかし微妙な意味で。

ラグランジアンの不定性は問題か？

系 1,2 がそれぞれ N_1, N_2 で定義されているとする。
$TN_1 \times TN_2$ の合成ラグランジュ系を考えたい。
全ラグランジアンをどうすればいいか？

$$L_1 + \lambda L_2 : TN_1 \times TN_2 \to \mathbb{R} \tag{26}$$

は、λ ごとに異なるラグランジアンを与える。
つまり、系の合成が well defined にならない！これは問題だ！

…？

ラグランジアンの不定性は問題か？

ウソです。しかし、まるっきりウソでもない...

- 系 1,2 が全く相互作用しないなら、λ の値がなんであっても、独立な 2 つの運動方程式を定めるだけで、何の問題もない。見せかけの問題にすぎない。

$$L_1 + \lambda L_2 \text{の方程式} \Leftrightarrow L_1 \text{の方程式} \wedge L_2 \text{の方程式} \quad (27)$$

- でも、誰もそんなことのために系を合成なんかしない。系を合成したということは、このあと何らかの相互作用を加えるつもりなんでしょう？
- でも、相互作用の結果まったく新しいラグランジアンになって、L_1, L_2 が原型をなくしてしまうなら、この議論自体意味がないのでは...

$\rightarrow$ “ほどよい” 相互作用にとっては λ の値に意味がある。

ラグランジアンの不定性は問題か？

“ほどよい” 相互作用のシナリオ：

- 同じ群作用のネーターモーメントは、“似た” 物理量。
- “似た” 物理量は、総和を考えたい。
- 総和を考えた上で、保存してほしい。

例：エネルギー、運動量、角運動量。

ラグランジアンの不定性は問題か？

“ほどよい” 相互作用のシナリオ：

- $G \curvearrowright N_1$ かつ $G \curvearrowright N_2$
- 全ネーターモーメント $M_1 + \lambda M_2$
  (全ラグランジアンから機械的に得るので λ に依存する！)
- 全ラクランジアン $L_t = L_1 + \lambda L_2 + L_I$ は G 作用で不変。
  (かつ L_I は v_1, v_2 に陽に依存しないこと)

このとき、$M_1 + \lambda M_2$ は保存するが、
その物理的な意味は λ ごとに違う。
このとき、

- λ は実験 (?) に合う数値でなくてはならない。
- λ は L_1, L_2 の次元を揃える次元でなくてはならない。

ラグランジアンの不定性は問題か？

例：

- 質点系 (のようなもの) が２つある。
- それぞれのラグランジアンはわかっている。
- 並進群が作用していて、運動量を考えられる。
- 相互作用があったとしても、全運動量は保存するだろう。
- 質点をぶつけて実験した。ある値 λ_0 にすると保存した。

この λ_0 は質量比 m_2/m_1 になっているはず。

ほどよい相互作用があればラグランジアンの不定係数を
“相対的に” キャリブレートできる。
(キャリブレートする必要に迫られる)

c.f. 熱力学温度の普遍性と不定性

理論の基本的な量に不定性があって、
それは “ほどよい” 相互作用によってキャリブレートされる、
というケースの前例として熱力学がある。
公理的/操作的に定義されたエントロピー

$$\lambda S(U, V, N \ldots) \tag{28}$$

には定数倍の不定性があるが、平衡原理

系の平衡 $\Rightarrow$ 等温

が守られるように、温度 $T^{-1} = \frac{\partial S}{\partial U}$ がキャリブレートする。
※ 本当は「熱交換しえる全ての系」を理論に含める。
※ 「熱交換しえる全ての系」に “含め忘れた系” が
キャリブレーションを必要とする。

c.f. 熱力学温度の普遍性と不定性

カルノー定理から絶対温度/エントロピーを作る場合も同様。

- 経験温度：「熱平衡」という同値関係のラベル $s, t, u \ldots$
- カルノー定理：

  2 熱源熱機関効率上限は熱源経験温度で決まる $\eta(s,t)$
- 絶対温度：$T_t(s) = T(s,t) = 1 - \eta(s,t)$

異なる t を取ると、別の温度計が得られるが、必ず定数倍。
∵ エネルギー収支を考えると次が成り立つ。

$$\eta(s,u) = \eta(s,t) + \eta(t,u) - \eta(s,t)\eta(t,u) \tag{29}$$

$$T(s,u) = T(s,t)T(t,u) \tag{30}$$

c.f. 熱力学温度の普遍性と不定性

絶対温度は経験温度の同値関係の数値表現だから、
そもそも熱平衡させられない系の集まりの間では
温度は意味をなさない。
「熱交換」という “ほどよい” 相互作用をする系の間では、
温度・エントロピーをキャリブレートする動機がある。

絶対温度は “互いに相互作用 (熱平衡) できる” という関係で
閉じた宇宙ごとに定義される。
その閉じた宇宙の内側でもグローバルな不定性がある。

※ケルビン [K] “原器” を人間が勝手に決めていいので、
SI 単位でもボルツマン定数は定義値になっている。

量子力学では...

ここで、(漸く) 量子力学に帰ってくる...

量子力学では...

量子力学は無次元の理論である

シュレディンガー方程式の $\hbar$ も見なかったことにする
(ハミルトニアンの次元がエネルギーである理由がないから)

量子力学では...

解析力学と違って、
量子力学には次元付き係数の不定性はない。
しかし次のような機構は備えている。

- 群 G が (ユニタリ) 作用しているとき、: $U(g)$
- そのリー代数ごとに自己共役作用素があって、
- それは変換の生成子になり、$U(\exp(ta)) = \exp(it\hat{A})$
- ハミルトニアンが G 不変なら保存量である。

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = i[\hat{H}, \hat{A}] = 0 \tag{31}$$

いわば、量子力学版のネーターの定理。
ということで、$U(t) = \exp(it\hat{A})$ の $\hat{A}$ を、
この系・作用のネーターモーメントと呼ぶことにする。

量子力学では...

どちらにも、

- 群作用 $\Leftrightarrow$ 物理量/生成子
- 不変性 $\Leftrightarrow$ 保存則

の機構がある。
同じように “ほどよい” 相互作用のシナリオを考える：

- 同じ群作用のネーターモーメントは、“似た” 物理量。
- “似た” 物理量は、総和を考えたい。
- 総和を考えた上で、保存してほしい。

Global Calibration

敷衍すると、こう：

- 同じ群 G が量子系 H(Hilbert Sp.) と古典系 N に作用
- 古典系のモーメント $M_c = \lambda X^i \frac{\partial L}{\partial v^i}$
- 量子系のモーメント $U(t) = \exp(it\hat{M}_q)$
- この２つは "似ている" はずなので総和を考えたい。

$$\lambda M_c + \hat{M}_q \qquad (32)$$

- 総和を考えた上で、保存してほしい。

Global Calibration

ここで次元解析：

- G のパラメータの次元を P とする。
- ラグランジアンの次元を L とする。
- $[M_c] = \left[X^i \frac{\partial L}{\partial v^i}\right] = LTP^{-1}$
- $\left[\hat{M}_q\right] = P^{-1}$

物理量の足し算は同次元で行われるから、
λ の次元は $L^{-1}T^{-1}$ つまり作用次元の逆。

- 古典系同士は先の議論でキャリブレーション済
- 量子系はキャリブレーション不要

ということは、λ は量子系という絶対基準を用いて
古典系のグローバル不定係数をキャリブレートしている。

Global Calibration

$$\lambda = \hbar^{-1}$$

Global Calibration

しかし通常はこういうとき

$$\hbar^{-1} M_c + \hat{M}_q \tag{33}$$

ではなく

$$M_c + \hbar \hat{M}_q \tag{34}$$

としている。つまり、本来古典力学側の係数なのに、
量子側に押し付けている。考えられる理由として、

- 古典的物理量は「よく知られている」
- 量子的物理量は「馴染みがない」
- 保存則を経由して
古典的物理量の解釈を量子的物理量に投影している

そんなことできるのか？

この議論を具体化するために必要なこと：

量子系と古典 (ハミルトン) 系を直接相互作用させる

$\Downarrow$

Q. Hybrid System は可能か？

A................................

ということで

ここから Hybrid System のサーベイとなります。

~~思ったより沼が深かった...~~

Hybrid System?

古典系 $T^{(*)}N$ と量子系 H があるとき、
両者の相互作用が可能な理論がほしい。

- 古典論は、ポアソン環があれば大体計算できる。
- 正準/リウヴィル方程式 $\frac{dA}{dt} = \{-, A\}$
  のように、ポアソン括弧が基本的な運動方程式。
- 量子論は、作用素代数があれば大体計算できる。
- 量子リウヴィル/ノイマン方程式 $\frac{d\hat{A}}{dt} = -i[-, A]$
  のように、交換子が基本的な運動方程式。

$(H, \mathcal{L}(H))$ と $(T^*N, C^\infty(T, N))$ を埋め込める構造がほしい。
$-i[-,-]$ と $\{-,-\}$ のコンパチ括弧積がほしい。
一番簡単な直和 $\mathcal{L}(H) \oplus C^\infty(T^*N)$ は相互作用しない。

Hybrid System?

$\rightarrow$ 要件：

- $-i[-,-]$ と $\{-,-\}$ の拡大であるような積を持っていて，
- $\mathcal{L}(H) \oplus C^\infty(T^*N)$ を含んでより大きい何か。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(H) \arrow[dr] & & \\
& ? \arrow[r] & C^\infty(T^*N, \mathcal{L}(H)) \\
C^\infty(T^*N) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd} \tag{35}$$

とりあえず、相空間上の作用素場 $C^\infty(T^*N, \mathcal{L}(H))$ がこれを含んでいるという見込みで考える。
※ T^*N という古典セクターを持つ H の量子論

ポアソン括弧の次元解析

ここで次元解析：

- 作用素交換子 $[-,-]$ の次元は無次元。
- ポアソン括弧 $\{-,-\}$ の次元は負の作用次元。

ラグランジアン係数 λ を量子論でキャリブレートするので

$$p_\lambda = \frac{\partial \lambda L}{\partial v} \tag{36}$$

$$\{A,B\}_\lambda = \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial {p_\lambda}^i} - \frac{\partial A}{\partial {p_\lambda}^i}\frac{\partial B}{\partial q^i} \tag{37}$$

$$= \lambda^{-1}\{A,B\} = \hbar\{A,B\} \tag{38}$$

となって、ポアソン括弧もキャリブレートされる。
$\lambda^{-1} = \hbar$ を作用次元で選べば無次元化する。

Aleksandrov-Gerasimenko-Boucher-Tranchen

$-i[-,-]$ と $\hbar\{-,-\}$ を兼ねる
$C^\infty(T^*N, \mathcal{L}(H))$ 上の積 (による運動方程式)

(Aleksandrov/Gerasimenko/Boucher, Tranchen)

[1][2][3]

$$(A, B) = -i\,[A, B] + \frac{\hbar}{2}\left(\{A, B\} - \{B, A\}\right) \tag{39}$$

$$\frac{dA}{dt} = (H, A) \tag{40}$$

※ $\{A, B\}$ は作用素積とポアソン括弧を兼ねる。

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i}\frac{\partial B}{\partial q^i} \tag{41}$$

↑の隣り合う A, B は各点の作用素積。

AG/BT 括弧

$A \in \mathcal{L}(H) \mapsto (\_ \to A)$(定数作用素) で $\mathcal{L}(H)$ 埋め込み。

$$-i[A, B] \mapsto (A, B) \tag{42}$$

$A \in C^\infty(T^*N) \mapsto 1A(1$: 恒等作用素) で $C^\infty(T^*N)$ 埋め込み。

$$\hbar \{A, B\} \mapsto (A, B) \tag{43}$$

良い性質：重線形/反対称/エルミート性を保存/規格化保存

$$\int_{T^*N} \mathrm{tr}(A, B) d\mu = 0 \tag{44}$$

※ μ はリウヴィル測度でとる。

AG/BT 括弧

第一項：古典 $\to$ 量子の影響
古典系の状態に依存するユニタリ (?) 発展

$$-i\,[A, B] \tag{45}$$

第二項：量子 $\to$ 古典の影響
量子状態に依存する正準 (?) 変換

$$\frac{\hbar}{2}\left(\{A, B\} - \{B, A\}\right) \tag{46}$$

AG/BT 括弧 (導出)

“導出” (方法 [4] によるレビュー版)：
まず、量子系が２つある場合を考える。H_1, H_2
$A_i, B_i : H_i \to H_i$ テンソル作用素の交換子：

$$[A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2] \tag{47}$$
$$= A_1 B_1 \otimes A_2 B_2 - B_1 A_1 \otimes B_2 A_2 \tag{48}$$

系 2 側が、次のように “古典対応” しているとする。

$$A_2, B_2 \in \mathcal{L}(H_2) \Leftrightarrow A_{2c}(q,p), B_{2c}(q,p) \tag{49}$$
$$A_2 B_2 \Leftrightarrow A_{2c} \star B_{2c} \tag{50}$$
$$A_{2c} \star B_{2c} = A_{2c} B_{2c} + \frac{i\hbar}{2}\{A_{2c}, B_{2c}\} + o(\hbar) \tag{51}$$

この $\star$ は、変形量子化の Moyal 積に対応する。

AG/BT 括弧 (導出)

(ここでちょっと変形量子化について解説)
変形量子化：

古典系の関数環 $C^\infty(T^*N)$ に、変な積 $\star$ を定義し、
量子化されたときの対応する作用素積に一致するようにする。
変形は $\hbar$ で制御され、$\hbar = 0$ は通常の積に一致させる。

つまり、片方の系 2 が変形量子化で古典系に結びついていると仮定する。

AG/BT 括弧 (導出)

系 2 だけを古典対応させた状態での交換子

$$
\begin{aligned}
&[A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2] && (52)\\
=&A_1B_1 \otimes A_2B_2 - B_1A_1 \otimes B_2A_2 && (53)\\
\Rightarrow &A_1B_1\left(A_{2c}B_{2c} + \frac{i\hbar}{2}\{A_{2c}, B_{2c}\} + o(\hbar)\right) && (54)\\
&- B_1A_1\left(B_{2c}A_{2c} + \frac{i\hbar}{2}\{B_{2c}, A_{2c}\} + o(\hbar)\right) && (55)\\
=&[A_1A_{2c}, B_1B_{2c}] && (56)\\
+&\frac{i\hbar}{2}(\{A_1A_{2c}, B_1B_{2c}\} - \{B_1B_{2c}, A_1A_{2c}\}) + o(\hbar) && (57)\\
=&(A_1A_{2c}, B_1B_{2c}) + o(\hbar) && (58)
\end{aligned}
$$

ここで、$o(\hbar)$ を無視すると (!!)、AG/BT 括弧。

AG/BT 括弧 (導出)

AG/BT 括弧はきれいな形をしているが...

- 導出これでいいのか...？
  - 変形による古典対応を前提にしている
  - $o(\hbar)$ を勝手に無視していいの？
  - 実際ダメで、[5] で一般化が提案されている
  - 仮に古典対応が正しいとしても、$o(\hbar)$ オーダーでエラーが起き得る。
- 他にも問題点が色々ある [4]
  - 正定値性/Jacobi/Leibniz
  - 後述する。

一旦 AG/BT 括弧がうまくいくのだとして、
キャリブレーションの議論をやってみる。

具体計算

例：円周上の質点 + スピン系：
古典系 $(\theta, l = I\omega)$

$$U(1) \curvearrowright T^*S^1 : \theta \mapsto \theta + \phi \tag{59}$$

$$H_c = \frac{1}{2I} l^2 \tag{60}$$

量子系 $\mathbb{C}^n$($\hat{J}_i$ からプランク定数は下ろす)

$$U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^n : U(\phi) = \exp(-i\phi \hat{J}_3) \tag{61}$$

$$\hat{H}_q = \frac{1}{2} \hat{J}_3^2 \tag{62}$$

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{J}_k,\ \ \hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2, [\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm$$

具体計算

較正係数付き相互作用ハミルトニアン (の例)：

$$H_t = \hbar^{-1} H_c + H_q + e^{i\theta} \hat{J}_+ - e^{-i\theta} \hat{J}_- \tag{63}$$

$H_I = e^{i\theta} \hat{J}_+ - e^{-i\theta} \hat{J}_-$ は、
$U(1) \curvearrowright T^* S^1$,$U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^n$ 同時作用で不変。

$$\Delta_c H_I = i\phi \left(e^{i\theta} \hat{J}_+ + e^{-i\theta} \hat{J}_- \right) \tag{64}$$

$$\Delta_q H_I = -i\phi \left(e^{i\theta} \hat{J}_+ + e^{-i\theta} \hat{J}_- \right) \tag{65}$$

具体計算

全モーメント：

$$\hbar^{-1} l + \hat{J}_3 \tag{66}$$

の変化を AG/BT 括弧で計算すると

$$\begin{aligned} &(H, \hbar^{-1} l + \hat{J}_3) \quad (67)\\ =& -\left(e^{i\theta}\hat{J}_+ + e^{-i\theta}\hat{J}_-\right) + \frac{\hbar}{\hbar}\left(e^{i\theta}\hat{J}_+ + e^{-i\theta}\hat{J}_-\right) \quad (68)\\ =&0 \quad (69)\end{aligned}$$

で保存する (個別の系では保存しない)。
→ 実際の系 (?) でも保存するように、$\hbar$ の値を較正する。
→ プランク定数が決まる
※ $\hbar J_i$ と $l = I\omega$ が "同格" の物理量になる。

AG/BT 括弧の問題点

- 局所的な正値性が一般には保たれない？
  - $\exists(q,p)\in T^*N, \hat{\rho}(q,p,t)<0$ な ρ に突入する？
  - Schr. 描像だと確率解釈上まずい
- AG/BT 括弧は一般には Leibniz 律が破れる
- AG/BT 括弧は一般には Jacobi 律が破れる [4]
  - リー代数にならず対称性の議論が制限される

$$A=\hat{X}q,\ B=\hat{X}\hat{P}q,\ C=\hat{P}p^2 \tag{70}$$

$$((A,B),C)+\text{cyc.}=\frac{\hbar^2}{2}\neq 0 \tag{71}$$

少なくとも $C^\infty(T^*N,\mathcal{L}(H))$ では色々破れる。
破れないように代数を制限することはできる (?)
こうした問題が顕在化しないように使う必要があり、
理論としては不完全。現状 $\hbar^1$ オーダーの理論。

終わりに

何がどうだというのか？

何がどうだというのか？ Part.1

(ハイブリッド系の議論が大筋としてよいのだとして...)
プランク定数について：

- プランク定数が古典側の定数だとして、何か問題か...？
- 古典力学で完結しているときは、グローバルゲージ定数。
- 「古典極限」とは何か？
- $h \to 0$ で "古典系が" 量子系に対して大きくなる。
- 「あるプランク定数の量子力学」というものはない。
- 「あるプランク定数の古典力学」というものはある。

AG/BT 括弧の導出が怪しい ($o(\hbar)$ 無視) のも、
別の量子系が居ると古典極限が取れないからに思える。

何がどうだというのか？ Part.2

ハイブリッド理論の開発余地：

- AG/BT 括弧の問題点の対処はどうするか？
- AG/BT 括弧を修正/代数を制限する方法は？
  - [5] が議論している
- ハイブリッド系は物理的に「あるべき」なのか？
- 単なる近似ツールなのか？
- 逆に「量子還元」主義は妥当なのか？
  - 「究極的には全て量子論だろうから無くても良い」
  - 「そうは言ってもあったほうがいい」
- インストゥルメントのダイナミクスは書ける？
- 実はもっと根本的な不可能性があるのか？

何がどうだというわけではないですが... Part.3

個人的な動機：

- 量子化/古典極限なんて本当にあるのか？
  - 正準量子化がトラウマ
- 古典系と量子系は一般論としては全く異質な系
- 似ているとしたらそれは群作用が同じだから
- 量子と古典が同じ階層に住む状況があれば、量子化や古典極限に再考を迫れる...？ という下心 (?)
- しかし、思ったより沼が深そう

おしまい

~~Hybrid 系、あってほしい！~~

参考文献

[1] I.V.Aleksandrov. The Statistical Dynamics of System Cosisting of a Classcal and a Quantum Subsystem. Zeitschrift für Naturforschung A36,1981

[2] V.I.Gerasimenko. Dynamical Equations of Quantum Classcal Systems, Theor Math Phys,50,1982

[3] W.Boucher,J.Tranchen. Semiclassical physics and quantum fluctuations. Phys. Rev. Lett., 74 1995

[4] J.Caro,L.L.Salcedo. Impediments to mixing Classical and Quantum Dynamics. quant-ph/9812046 1999

[5] M.Amin,M.A.Walton. Quantum-Classical Dynamical Brackets. quant-ph/2009.09573 2009