Kolmogorov 拡張定理/Brown 運動の構成

@phykm

2018 年 7 月 10 日

概要

Hopf/Caratheodory の拡張定理は認めるとする。[1] の付録に基づく。

1 Kolmogorov 拡張定理

Theorem 1.1. *(Kolmogorov 拡張定理)*μ_n を $\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上の確率測度で、次の整合性を満たすものとする。

$$\mu_{n+1}(A \times \mathbb{R}) = \mu_n(A),\ (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \tag{1}$$

この時、可算無限個の直積可測空間 $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の確率測度 μ で、$\mu(A \times \mathbb{R}^\infty) = \mu_n(A)$ を満たすものが存在する。

Lemma 1.2. $\mathbb{R}^n$ のボレル集合は、全て外正則である。つまり、μ をここのボレル測度としたとき、$\mu(A) = \inf\{\mu(U)|A \subset U, U : \mathrm{open}\}$

Proof. $\mathbb{R}^n$ が距離空間であることを用いる。A の各点で $1/n$ サイズの開球の合併開集合をとって $n \to \infty$ ととれば測度の連続性から従う。

Lemma 1.3. $\mathbb{R}^n$ のボレル集合は、全て内正則（またはタイト）である。つまり、μ をここのボレル測度としたとき、$\mu(A) = \sup\{\mu(U)|K \subset A, K : \mathrm{compact}\}$

Proof. これは先よりも少し面倒である。なぜなら、内部から近似するものは閉集合ではなく、コンパクト集合であるから。そこで次の道具立てを用意しよう。$k \in \mathbb{N}, V \in \mathbb{Z}^n, m, l \in \mathbb{N}$ とする。

$$B(k, V, m, l) = [-l, l]^n \cap B(V/2^k, 1/m) \tag{2}$$

とする。$B(x, e)$ は x まわりの半径 e 閉球とする。これは各々コンパクト集合であって、その総数は可算個である。任意の開集合は（例えば）このような $B(k, V, m, l)$ を用意することで、コンパクト集合の可算和になると言ってよい。A が開集合であれば、

$$A = \cup\{B(k, V, m, l)|B(k, V, m, l) \subset A\} \tag{3}$$

が成り立つ。なぜなら、A は全てが内点であるから、A に含まれるような開球がある。2 進小数の稠密性から、この点をもつような $B(k, V, m, l)$ がある。このインデックスを適当に順序づければ、測度の連続性から、開集合は内正則であることもわかる。

ボレル集合族は開集合から生成された σ 代数だから、内正則であるような集合が σ 代数をなしていることがわかれば、ボレル集合族が内正則であることが言える。これを示そう。

$A_1 ... A_n ...$ が内正則であるとする。$\cup A_i = A, \mu(A_i - K_i) < \epsilon/2^i$ となるように、A_i の内側からコンパクト集合 K_i で近似する。十分大きな n をとれば $\mu(A) - \mu(\cup_i^n A_i) < \epsilon$ とでき、また $\mu(\cup_i^n A_i - \cup_i^n K_i) < \mu(\cup_i (A_i - K_i)) < \epsilon$ ともできる。$\cup_i^n K_i$ はコンパクトで、ϵ は任意であったから、これで内正則集合の可算和が内正則であることが言えた。

空集合は明らかに内正則である。

A が内正則であるとき、補集合 A^c が内正則であることを言おう。しかし実際にはこの前提は不要である。A は外正則ではあるので、$A \subset U, \mu(U) - \mu(A) < \epsilon$ ととれる。したがって、$U^c \subset A^c, \mu(A^c) - \mu(U^c) < \epsilon$。しかし U^c はこのままではたんなる閉集合で、コンパクトとは限らない。ここで $[-l, l]^n \subset \setminus^n, l \in \mathbb{N}$ で制限すればコンパクトになる。$\mu([-l, l]^n \cap U^c) \to \mu(U^c)$ であるから、この差も任意に小さくできる。したがって、A^c はコンパクト集合で近似できて内正則である。

以上より、内正則集合は開集合を含む σ 代数であるから、ボレル集合族を含む。したがってボレル集合は内正則である。

Lemma 1.4. 有限加法族 $\mathcal{C}$ 上の有限加法的 $[0,1]$ 関数 μ について、これが σ 加法的であることと次は同値。$C_i \in \mathcal{C}, C_i \to \emptyset$*(単調)* について、$\lim_i \mu(C_i) = 0$

Proof. $(\Rightarrow)$ 単調性を用いて、C_i を差分に分解すればよい。

$(\Leftarrow)$ 同様に、足し上げる集合列を単調減少する集合列に組み替える。

本ノートでは次を認める。

Lemma 1.5. *(Hopf/Cratheodory* 拡張定理*)* 有限加法族 $\mathcal{C}$ 上の可算加法的 $[0,1]$ 関数は、$\sigma(\mathcal{C})$ 上の測度へ拡張できる。

Proof. (Kolmogorov 拡張定理) シリンダー集合族 C を次で定義する。

$$C = \{A \times \mathbb{R}^\infty | A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\} \tag{4}$$

このうえで要求された条件を満たすように $\mu(A \times \mathbb{R}^\infty) = \mu_n(A)$ と定める。C は有限加法族で、$\sigma(C) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ であるから、この μ が Hopf/Caratheodory の拡張定理の前提を満たせばよい。拡張定理の前提は、次のように読み替えてもよい。すなわち、「単調減少な集合列 C_n が $\lim_n \mu(C_n) > 0$ であるとき、$\lim_n C_n \neq \emptyset$」。これを示そう。具体的には $\lim_n C_n$ の要素を構成する。ゼロでない測度に収束するということは、$\exists \epsilon > 0, \exists n, \forall m > n, \mu(C_m) > \epsilon$ であるから、C_n の先頭をいくつか捨てることで、常に $\mu(C_n) > \epsilon$ と思ってよい。C_n は単調列だったから、このような切り落としは $\lim_n C_n$ に影響しない。

次に、C_n のナンバリングを変更する。つぎのように番号の振り直しを行って集合列 D_n をつくる。ここで、便宜的に $C_0 = \mathbb{R}^\infty$ であるとする。

$i \Leftarrow 0$
$j \Leftarrow 1$
while (**true**) **do**
  if $C_j = A \times \mathbb{R}^\infty, A \in \mathcal{B}(\mathbb{B}^i)$ **then**
    $D_i = C_j$
    $j \Leftarrow j + 1$
  else
    $D_i = C_{j-1}$

end if

$i \Leftarrow i+1$

end while

これは何をしているのかというと、$D_n = A \times \mathbb{R}^\infty$ としたとき、A が n 次元の集合になって欲しいので、そのような C_i が訪れるまで待機させている。C_i は今シリンダー集合族の元であるから、すべての C_i は順序を保った上でいつか D_n に現れる。また明らかに $\lim_n D_n = \lim_i C_i$ である。

$D_n = A_n \times \mathbb{R}^\infty$ のように $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ としよう。今 $\mu(C_n) > \epsilon$ であったから、もちろん A_n はいずれも空ではなく、$\mu_n(A_n) > \epsilon$ である。ボレル集合の内正則性をつかって、この A_n をコンパクト集合で近似する（なぜコンパクト集合にしたいかというと、後で点列の収束先を得るためである)。このとき、近似することで単調性が損なわれたり、空になってしまっては困るので、ややテクニカルだが、次のようにとる。$\mu_n(A_n - K_n) < \epsilon/2^{n+1}$ となるように K_n をとってから、帰納的に $A'_1 = K_1$、$A'_n = (A'_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap K_n$ とする。これを用いて $D'_n = A'_n \times \mathbb{R}^\infty$ とする。こうすれば再び D'_n は単調であって、その n 次元射影はコンパクトで、また次のように正の測度を持ち続けるので途中で空にならない。

$$\mu(D'_n) \tag{5}$$
$$=\mu_n(A'_n) \tag{6}$$
$$=\mu_n(K_n) - \mu_n(K_n \backslash A'_{n-1} \times \mathbb{R}) \tag{7}$$
$$\geq\mu_n(K_n) - \mu_n(A_n \backslash A'_{n-1} \times \mathbb{R}) \tag{8}$$
$$=\mu_n(K_n) - \mu_n(A_n) + \mu_n(A'_{n-1} \times \mathbb{R}) \tag{9}$$
$$=\mu_n(K_n) - \mu_n(A_n) + \mu(D'_{n-1}) \tag{10}$$
$$\geq - \epsilon/2 + \mu(D'_1) \tag{11}$$
$$\geq - \epsilon/2 + \epsilon \tag{12}$$
$$\geq\epsilon/2 \tag{13}$$

この A'_n を使って $\lim_n D'_n = \lim_i C_i$ の点の構成しよう。空ではないから $x_n \in D'_n$ を各々取ってくることができる。この第一成分 x^1_n はコンパクト集合 A'_1 に含まれるので適当な集積点 x^1_∞ をとって、ここへの収束部分列をとることができる。x_n をこの部分列に制限しよう。この制限された部分列の第一、二成分は再びコンパクト集合 A'_2 に含まれるので適当な集積点をとって、収束部分列をとることができる。このとき第一成分はすでに先の x^1_∞ に収束するので、新しく定まるのは第二成分の収束先 x^2_∞ である。これを同様に繰り返すことで、x^j_∞ を全ての成分について構成できる。したがって、直積位相で x_n の収束先である x_∞ が存在する。x_∞ の各成分は A'_j に含まれるのだから、$x_\infty \in D'_n$ すなわち、$x_\infty \in \lim_n D'_n = \lim_i C_i \neq \emptyset$ となる。

したがって、Hopf/Caratheodory 拡張定理の適用条件を満たすので、所要の測度が存在する。

2 Brown 運動

Brown 運動の「直観」はランダムウォークの細分極限だが、ランダムウォークの可測空間の極限（？）を取るわけにもいかない。「細分極限のような性質」として、任意の区間の増分が正規分布であるという性質がある。これを実現することを考える。まずは有限区間、具体的には $t \in [0,1]$ 上のブラウン運動を構成しよう。$[0,1]$ 上の 2 進小数点（当然稠密である）を

$$D = \{k/2^n | n \in \mathbb{N}, 0 < k < 2^n\} \tag{14}$$

とする。これは可算であるので、適当に $t_1, t_2 ... \in D$ とナンバリングする。可算無限個の $\mathbb{R}$ のボレル可測空間を用意し、μ_n を

$$\mu_n(A) = \int_A \Pi_{i=1}^n, N(s_i - s_{i-1}, x_{i-1}, x_i)dx \tag{15}$$

で定める。ここで $\{s_i\}_{i:1...n}$ は $\{t_i\}_{i:1...n}$ をソートしたもので、$s_0 = 0$ であり、$N(\sigma^2, m, x)$ は平均 m 分散 σ^2 の正規分布である。$N(0, x)$ のときは、原点のディラック測度とする。これは整合的である。新しい t_{n+1} が加わったときの μ_{n+1} について、t_{n+1} を周辺化したときに μ_n にいっちすればいいが、t_{n+1} が $\{s_i\}_{i:1...n}$ のどこに挿入されても次の Chapman-Kolmogorov 等式によって整合的になる。

$$N(t + s, x, y) = \int N(t, x, z)N(s, z, y)dz \tag{16}$$

これは実質正規分布の再生性と同値である。

したがって、コルモゴロフ拡張定理から、$\mathbb{R}^D$ 上の確率測度 μ へ拡大できる。この確率空間を用いて、$t \in D$ のとき $B_t = \pi_t : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$、$t \notin D$ のとき $B_t = \liminf_{t \leq s} B_s$ として $[0, 1]$ 上の確率過程 B_t を得る。さらにこれを可算無限個用意して、$B_t'^i$ とし、$B_t = \sum_{i=1}^{i \leq t} B_1'^i + B_{t-[t]}'^{[t]+1}$ とすることで、$\mathbb{R}_+$ 上の確率過程となる。ここで $[t]$ は t の整数部分とする。

さて、こうすることでそれらしい確率過程を得たが、まずそもそも Brown 運動の定義をしていなかった。定義をした上で、以上の構成がこれを満たすことを示そう。

Definition 2.1. *(Brown 運動)* 正実数時間上の実数値確率過程 $\{B_t\}$ が *Brown* 運動であるとは、$B_0 = 0$ *a.s.* かつ、B_t は *(*ほとんどいたるところ[*1]*)* 連続かつ、増分 $B_t - B_s (t > s)$ が分散 $t - s$ 平均ゼロの正規分布であって、$0 = t_0 < t_1 < t_2 ...$ としたときの $\Delta B_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ が互いに独立であるものをいう。

Theorem 2.2. 上で構成した $(\Omega = \mathbb{R}^D, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty), \{B_t\}_{t \geq 0})$ は *Brown* 運動である。

Proof. 先に構成した B_t は、明示的な確率分布は 2 進有理時間点でしか与えていなかったが、正規分布は分散パラメータについて連続 (概収束) なので、実数時間に対して次のように確率分布を計算できているとしてよい。

$$P(B_{t_i} \in A_i) = \int_{\Pi_i A_i} \Pi_i N(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i)dx \tag{17}$$

特に

$$P(B_t - x_s \in A | B_s = x_s) = \int_A N(t - s, x_s, y - x_s)dy = \int_A N(t - s, 0, y)dy \tag{18}$$

となるので、増分の正規分布性および、独立性は満たしている。

実は独立増分性とガウス積分の計算によって、

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^4] = 3|t - s|^2 \tag{19}$$

を示すことができる。これと次の補題を用いることで、連続性が示される。D を $[0, 1]$ の 2 進有理点とする。[*2]

[*1] この条件はあってもなくてもよい

[*2] 2 進有理でない点の B_t は 2 進有理点のそれの極限で定義したので、2 進有理点上の連続性だけで B_t の連続性が従う。

Lemma 2.3. *(Kolmogorov 正規化定理)D 上バナッハ空間値確率過程 X_t が、ある $p, \epsilon, C > 0$ について*

$$\mathbb{E}[\|X_t - X_s\|^p] \le C|t-s|^{1+\epsilon} \tag{20}$$

を満たすとき、ほとんどいたるところ一様連続。

Proof.

$$\lambda_n = 2^{-n\epsilon/2p} \tag{21}$$

$$I_n = \{(s,t) | |t-s| < 2^{-n}\} \tag{22}$$

$$A_n = \{\omega | \|X_s - X_t\| \ge \lambda_n, \exists(s,t) \in I_n\} \tag{23}$$

として、$P(\limsup A_n) = 0$ を示そう。もしこれが成り立つならば、無限回 $\{A_n\}_n$ に入る ω は測度ゼロ、つまりほとんど確実に $\{A_n\}$ は有限回しか成り立たない。言い換えれば、十分大きな n をとったとき、任意の $m > n$ について $\forall |s-t| < 2^{-n}, \|X_s - X_t\| < e^{-n\epsilon/2p}$ となる。したがって一様連続である。

これを言うには Borel-Cantelli の補題を利用する。すなわち、$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ であれば $P(\limsup_n A) = 0$。したがって、$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ を示せばよい。

X_t を、t の 2 進展開を使って次のように書く。$a(n,t) = k/2^n,\ s.t.\ t \in [k/2^n, (k+1)/2^n)$ とする。すなわち、2 進 n 次の t を超えない近似点である。したがって、$(s,t) \in I_n$ であれば、$|a(n,s) - a(n,t)| \le 2^{-n}$ である。このとき、t の 2 進展開を考えると、

$$X_t = X_{a(n,t)} + \sum_{i=0}^{\infty} (X_{a(n+i+1,t)} - X_{a(n+i,t)}) \tag{24}$$

なる書き方ができる。右辺の和は便宜上無限にとっているが、実際には t が有理なので、2 進展開の最大桁でストップする。

n ごとに次の事象を考える。

$$B_n = \{\exists(s,t) \in I_n, \|X_{a(n,t)} - X_{a(n,s)}\| \ge \lambda_n/2\} \tag{25}$$

$$C_n = \{\exists t, \exists i, \|X_{a(n+i+1,t)} - X_{a(n+i,t)}\| \ge 3\lambda_n/2(i+1)^2\pi^2\} \tag{26}$$

このとき、$A_n \Rightarrow B_n \cup C_n$ である。なぜならば、B_n, C_n がともに成り立たないならば、

$$\|X_s - X_t\| \tag{27}$$

$$= \|X_{a(n,s)} - X_{a(n,t)}\| + \sum_{i=0}^{\infty} \|X_{a(n+i+1,t)} - X_{a(n+i,t)}\| + \sum_{i=0}^{\infty} \|X_{a(n+i+1,t)} - X_{a(n+i,t)}\| \tag{28}$$

$$< \lambda_n/2 + 2\sum_{i=0}^{\infty} 3\lambda/2(i+1)^2\pi^2 \tag{29}$$

$$< \lambda_n/2 + 2\frac{3}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}\lambda_n \tag{30}$$

$$= \lambda_n \tag{31}$$

で、これは A_n の否定 (補集合) だからである。ここで

$$P(B_n) \leq 2^n \sup_{s\in D_n} P(\||X_{s+2-n} - X_s\| \geq \lambda_n/2) \tag{32}$$

$$\leq 2^n 2^p \lambda_n^{-p} \sup_{s\in D_n} \mathbb{E}[\||X_{a(n,s+2-n)} - X_{a(n,s)}\|] \tag{33}$$

$$\leq 2^n 2^p \lambda_n^{-p} 2^{-n(1+\epsilon)} C = C 2^{-n\epsilon} \lambda_n^{-p} \tag{34}$$

$$P(C_n) \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{n+i+1} \sup_{s\in D_{n+1}} P(\|X_{s+2^{-(n+i+1)}} - X_s\| \geq 3\lambda/2(i+1)^2\pi^2) \tag{35}$$

$$\leq C \sum_{i=0}^{\infty} 2^{n+i+1} 2^{-(n+i+1)(1+\epsilon)} (2(i+1)^2\pi^2)^p (3\lambda_n)^{-p} \tag{36}$$

$$\leq C' 2^{-n\epsilon} \lambda_n^{-p} \tag{37}$$

と計算できる。D_n は 2 進下 n 桁の小数とする。B_n については、$a(n,t), a(n,s)$ のとりえる値の組み合わせたかだか 2^n であることと、題意で仮定された性質を用いた。C_n についても同様で、$a(n+i+1,t), a(n+i,t)$ のとりえる値の組み合わせがたかだか 2^{n+i+1} であることと、題意の仮定を用いた。最後の変形は、2 のべきが $(i+1)^p$ をバウンドすることを用いて、級数和の結果で定数を置き換えている。

これより $P(A_n) \leq P(B_n) + P(C_n) \leq C'' 2^{-n\epsilon} \lambda_n^{-p}$ であり、この和は幾何級数として有界に収束する。したがって Borel-Cantelli が適用となって、題意が示される。

Brown 運動はほとんど確実に連続だが、不連続である $\omega \in \Omega$ については自由に連続な値を割り当てて修正することで連続にできる。したがって、$\omega \in \Omega \mapsto (\lambda t, B_t(\omega)) \in C([0,\infty), \mathbb{R})$ なる写像で押し出すことによって、$[0,\infty)$ 上の連続関数空間に測度が与えられているとみなすことができる。この時、B_t から有限個を取り出す写像で実数のボレル集合[*3]を引き戻して得られる σ 加法族 $\sigma(\{\{B_{t_i}\}_{i:1\dots n} | t_i \in [0,\infty), n \in \mathbb{N}\})$ は、$C([0,\infty), \mathbb{R})$ の広義一様収束位相によるボレル族と一致することが知られている。このように可測空間を連続関数空間、σ 加法族を広義一様収束位相ボレル（ないし柱状集合生成）でとった場合の Brown 運動の測度を特に Wiener 測度と呼ぶ。

参考文献

[1] 舟木直久 確率微分方程式 岩波書店 (2005)

[2] 舟木直久　確率論　朝倉書店　数学の考え方 20(2004)

*3 柱状集合と呼ぶ