Fock 空間で完全理解する確率過程

@phykm

December 16, 2019

1　はじめに

Fock 空間は大変質がよいので、確率過程っぽい何かを書けてしまいます。確率過程はこれはもう大変すごい理論で、計算のインターフェースも伊藤公式とか二次変動の公式とかめちゃくちゃ整っていて、スーパーお金になる応用分野がめっちゃある (偏見) 一方、反面基礎定理を示すのがやたら辛いという問題があります。あと確率空間を用意するのがつらい。まぁそれを作ったおかげてちゃんとした証明ができるというのもあるでしょうが、確率過程自体の性質のシンプルさに対して構成が地味で大変という印象があります。

ということで、フォック空間上で、独立増分な確率過程を雑に作って計算する話をします。具体的には Levy 過程、つまり Poisson 過程と Gauss 過程を組み合わせて作れるような独立増分過程を、確率空間の構成やサンプルパスみたいな話をガン無視して構築し操作することを考えます。これを使って伊藤の公式 (ただし独立増分な過程に限定) を証明します。Fock 空間でやる伊藤積分については、Parthasarathy の論文 [1] があります。以下では物理屋の悪いところ（非有界性とか積分と極限の交換とかを雑に扱う）を爆裂的に発揮します。また、以下のノーテーションは必ずしも一般的とは限りません。

2　Fock 空間のノーテーション

Hilbert 空間 H 上の Boson-Fock 空間を $F(H)$ とし、この上の生成作用素 $\mathfrak{a}^\dagger : A \otimes F(H) \to F(H)$ を

$$\mathfrak{a}^\dagger(\phi_0 \otimes \mathfrak{S}_n(\phi_1 \otimes \phi_2 \dots \phi_n)) = \sqrt{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}(\phi_0 \otimes \phi_1 \dots \phi_n) \tag{1}$$

とする。$\mathfrak{S}_n$ は対称化作用素で

$$\mathfrak{S}_n(\phi_1 \otimes \phi_2 \dots \phi_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \phi_{\sigma(2)} \dots \phi_{\sigma(n)} \tag{2}$$

とする。消滅作用素は生成作用素の共役で定義し、$g \in H, f \in H^*$ に対して、

$$a_+(g) = \mathfrak{a} \circ (g \otimes \mathrm{id}_{F(H)} : F(H) \to F(H) \tag{3}$$

$$a_-(f) = (f \otimes \mathrm{id}_{F(H)}) \circ \mathfrak{a}^\dagger : F(H) \to F(H) \tag{4}$$

とすると、これは正準交換関係

$$[a_-(f), a_+(g)] = f \circ g \tag{5}$$

を満たす。[1]さらに $J : H \to H$ に対して

$$N(J) = \mathfrak{a}^\dagger (J \otimes \mathrm{id}_{F(H)}) \mathfrak{a} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

とする。以下では、確率過程が定義される「空間」として、可測空間 Ω を考える。Ω 上定義される H 上の PVM $dP(\omega)$、および、$dP(\omega)$ と可換な自己共役有界作用素 J について、

$$J(\omega) = dP(\omega) J dP(\omega) \tag{8}$$

$$da_-(f)(\omega) = a_-(f dP(\omega)) \tag{9}$$

$$da_+(g)(\omega) = a_+(dP(\omega) g) \tag{10}$$

$$dN(J)(\omega) = N(J(\omega)) \tag{11}$$

のような略記をする。また、内積は双対空間の要素との合成と同一視する。つまり、$\langle f, g \rangle = f^\dagger \circ g$。また、以下合成の $\circ$ は、(主にタイプがめんどいという理由から) 曖昧さがなければ略す。以下で構成するのは、直接には時間軸上の確率過程というよりは、確率場、もっと言うと作用素値測度 ($dW(\omega)$) の形をしている。それは各時刻ごとに計算されるというよりは、任意の窓関数での積分が確率変数として振る舞うようになっている。このことは、通常の確率過程における増分 $dW(t)$(これは通常、伊藤積分などの確率積分方程式を立てるために使われるはず) に対応する。

したがって、これを通常の意味での、時間上の確率過程と解釈するには、次のようにすればいい。$\Omega = [0, \infty)$ の場合を考え、$W(t) = \int_0^t dW$ とすれば、これは確率過程である。その期待値は真空ベクトルを使って $\langle 0 | W(t) | 0 \rangle$ で計算される。

3 Gauss 過程を作る

3.1 作る

$g \in H, p \in H, n \in H$ をとって、

$$dW(\omega) = da_+(g)(\omega) + da_-(g^\dagger)(\omega) + p^\dagger dP(\omega) p - n^\dagger dP(\omega) n \tag{12}$$

を q-Gauss 過程とする。PVM を介して定義されているように、これはフォック空間上作用素値測度とみなす。最初の $da_+(g)(\omega) + da_-(g^\dagger)(\omega)$ が分散強度を示し、後半の $p^\dagger dP(\omega) p - n^\dagger dP(\omega) n$ は期待値を表す。ここで、$p \perp n$ として一般性を失わない。前半部分は場の演算子のようだが、よく知られているように、実は自由場の演算子は真空においてはガウス的に振る舞う。このことは特性関数を計算することで確認することができる。$\theta(\omega)$ を Ω 上の可測実関数とする。

$$\Phi_W(\theta) = \exp\left(i \int \theta(\omega) dW(\omega) \right) \tag{13}$$

[1]以下での結果は主にこの関係を使って計算されている。

を考えよう。以下同様に作用素値測度の形で書かれた確率過程についてのこのような作用素を特性作用素と呼ぶことにする。指数の型に乗っているスカラー部分は単なる位相回転である。残りの自由場部分に着目すると、これは coherent 発振のユニタリ変換に他ならない。物理屋はこの計算方法を知っているはずである。この期待値は特性 (汎) 関数であり、

$$\phi_W(\theta) \tag{14}$$
$$=\langle 0|\Phi_W(\theta)|0\rangle \tag{15}$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\int \theta^2(\omega)g^\dagger dP(\omega)g + i\int \theta(\omega)p^\dagger dP(\omega)p - i\int \theta(\omega)n^\dagger dP(\omega)n\right) \tag{16}$$

となる。この形からわかるように、この確率過程は $d\omega$ ごとに独立増分であって、それぞれ Gauss 的である。

3.2 おまけ:Gauss 過程回帰の作り方

Gauss 過程回帰とは、Gauss 過程を用いたベイズ的な推定であり、それが暗黙にカーネル回帰を含むことからこう呼ばれる。Gauss 過程回帰に必要のは、各入力に対する Gauss 変数の期待値と、入力ペアに対する Gauss 変数たちの分散を表す実カーネルである。これを Fock 空間で実現することは極めて簡単にできる。最初の Hilbert 空間 H を、実再生核 $K(-,-):X\times X\to\mathbb{R}$ で生成される再生核ヒルベルト空間とする。入力 x に対応する Gauss 変数は、カーネルベクトル K_x と、期待値場 $m(x)$ を使って、

$$\mathfrak{a}_+(K_x)+\mathfrak{a}_-(K_x^\dagger)+m(x) \tag{17}$$

とする。すると、データ点 $x_1\ldots x_n$ の同時分布についての特性関数は、

$$g=\sum_i \theta_i K_{x_i} \tag{18}$$

とした場合の先の計算と同様にでき、その共分散は係数比較から $K(x_i,x_j)$ になり、これは望む Gauss 過程である。作用素の非可換性が気になるだろうが、カーネルを実でとったために、以上の Gauss 変数たちは実際には可換になっていて問題は生じない。

4 Poission 過程を作る

4.1 作る

J を $dP(\omega)$ と可換な自己共役作用素、$l\in H$ とする。

$$d\Pi(\omega)=dN(J)(\omega)+da_+(Jl)(\omega)+da_-(l^\dagger J)(\omega)+l^\dagger J(\omega)dP(\omega)l \tag{19}$$

を q-Poisson 過程とする。同様に増分を表す作用素値測度である。よく知られているように、$N(J)$ の固有値は、$\mathrm{spec}(J)\times N$ のそれである。また coherent 状態の粒子数 $N(\mathrm{id}_H)$ の分布は Poisson 分布になる。この定義は一見非直観的だが、

$da_+(Jl)+da_-(l^\dagger J)$ を相殺して対角化するような coherent 発振をすることで、その意図が明らかなものになる。次のユニタリ作用素を考える。

$$U(v)=\exp(\mathfrak{a}_+(v)-\mathfrak{a}_-(v^\dagger)) \tag{20}$$

これは消滅作用素を次のように変換する。

$$\mathfrak{a}'=(\mathrm{id}_H\otimes U(v))\mathfrak{a}U^\dagger(v)=\mathfrak{a}-v\otimes \mathrm{id}_{F(H)} \tag{21}$$

また、次が成り立つ。

$$U(v)|0\rangle=\exp\left(-\frac{1}{2}v^\dagger v\right)\sum_n\frac{1}{n!}(\mathfrak{a}^\dagger(v\otimes \mathrm{id}_{F(H)}))^n|0\rangle \tag{22}$$

この $U(v)$ は Fock 空間上のユニタリ変換である。$v=l$ としてこれで $d\Pi$ を変換すると、

$$U(l)d\Pi(\omega)U^\dagger(l)=dN(J)(\omega) \tag{23}$$

となる。したがって、これは J のスペクトル値をジャンプ幅とする Poisson 過程を表現していると予測できる。特性関数を計算すればこの直観は明らかなものとなる。先と同様に特性作用素を

$$\Phi_\Pi(\theta)=\exp\left(i\int\theta(\omega)dW(\omega)\right) \tag{24}$$

とする。

$$\langle 0|\Phi_\Pi(\theta)|0\rangle \tag{25}$$
$$=\langle 0|U^\dagger(l)U(l)\Phi_\Pi(\theta)U^\dagger(l)U(l)|0\rangle \tag{26}$$
$$=\langle 0|U^\dagger(l)\exp\left(i\int\theta(\omega)dN(J)\right)U(l)|0\rangle \tag{27}$$
$$=\exp(-l^\dagger l)\sum_n\frac{1}{n!}\left(l^\dagger\exp\left(i\int\theta(\omega)J(\omega)dP(\omega)\right)l\right)^n \tag{28}$$
$$=\exp\left(l^\dagger\int\left(\exp\left(i\theta(\omega)J(\omega)\right)-\mathrm{id}_H\right)dP(\omega)l\right) \tag{29}$$

これをみると、確かに Poisson 過程であり、かつジャンプ幅が J(のスペクトル) であって、パラメータが l(の $d\omega$ での大きさ) であることがわかる。

5 Levy 過程もどきを作る

5.1 作る

Levy 過程は、本来古典確率論的には、確率連続かつ定常かつ独立増分で、サンプルパスが確率 1 で右連続かつ左極限をもつものとされる。しかし今はサンプル

パスの議論を放棄しているので、こうした直接定義を取ることができない。Levy 過程は、Gauss 過程と Poisson 過程の適当な和でかけるという、Levy-Ito の分解定理というのが知られている。今、この二つのタイプの確率過程は共に Fock 空間で表現できたのだから、Levy 過程の妥当な対応物が Fock 空間にいるはずである。そこで、これまでにみた上記二つの作用素値測度を組み合わせた

$$dL(\omega) = dN(I)(\omega) + da_+(c) + da_-(c^\dagger) + x^\dagger dP(\omega)x - y^\dagger dP(\omega)y \tag{30}$$

を q-Levy 過程と呼ぶことにする。ここで、$I : H \to H$ は dP と可換な自己共役作用素、$c, x, y \in H, x \perp y$ である。すなわち、$dP(\omega)$ を伴う生成消滅演算子の、(0,0),(0,1),(1,0),(1,1) 次までで構成される作用素値測度を q-Levy 過程とする。この上で、Levy-Ito の分解定理もどきを示したい。そのためには結局特性関数を計算できればよい。Levy 過程の特性関数は、Levy-Khintchine 公式と名前が付いている。ここで実行したいのは、dL の特性 (汎) 関数を計算 (し、それが Levy-Khintchine 公式と対応していることを確認) することである。

5.2 Levy-Khintchine の公式もどきを作る

単に特性関数を計算するが、この時にコツがある。今、Fock 空間で計算しているため、確率変数は作用素で書かれているが、これが非可換になった場合は古典確率変数としての解釈が成り立たなくなる。特性関数の計算の結果、それがこれまでに計算した Gauss 過程の特性関数と、Poisson 過程の特性関数に一致して欲しいのだから、そのような計算をした上で、Gauss 過程部分と、Poisson 過程部分が、作用素値測度として違いに可換になっている必要がある。

そこで、まず次のような分解をする。

$$c = c_1 + c_2 \tag{31}$$

$$c_1 \in \mathrm{Im}(I) \tag{32}$$

$$c_2 \in \mathrm{Im}(I)^\perp \tag{33}$$

この上で、q-Poisson のときと同様な coherent 発振ユニタリ $U(v)$ を $v = I^{-1}c_1$ で実行すると、

$$U(I^{-1}c_1)dL(\omega)U^\dagger(I^{-1}c_1) \tag{34}$$

$$= dN(I)(\omega) \tag{35}$$

$$+ da_+(c_2) + da_-(c_2^\dagger) \tag{36}$$

$$- c_1^\dagger I^{-1} dP(\omega)c_1 + x^\dagger dP(\omega)x - y^\dagger dP(\omega)y \tag{37}$$

と分解できる。これは違いに可換な作用素になっていることに注意。つまり、これらの作用素値測度を別々の古典確率変数と解釈してよい。これに対して特性汎

関数を計算しよう。

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\Phi_L(\theta)|0\rangle && (38)\\
=&\exp\left(\int i\theta(\omega)\left(x^\dagger dP(\omega)x - c_1^\dagger I^{-1}dP(\omega)c_1 - y^\dagger dP(\omega)y\right)\right) && (39)\\
\times&_{\mathrm{Im}(I)}\langle 0|U^\dagger(I^{-1}c_1)\exp\left(\int i\theta(\omega)dN(I)(\omega)\right)U(I^{-1}c_1)|0\rangle_{\mathrm{Im}(I)} && (40)\\
\times&_{\mathrm{Im}(I)^\perp}\langle 0|U^\dagger(I^{-1}c_1)\exp\left(\int i\theta(\omega)(da_+(c_2)+da_-(c_2^\dagger))\right)U(I^{-1}c_1)|0\rangle_{\mathrm{Im}(I)^\perp} && (41)\\
=&\exp\left(\int i\theta(\omega)\left(x^\dagger dP(\omega)x - c_1^\dagger I^{-1}dP(\omega)c_1 - y^\dagger dP(\omega)y\right)\right) && (42)\\
\times&\exp\left(c_1^\dagger I^{-1}\int\left(\exp\left(i\theta(\omega)I(\omega)\right)-\mathrm{id}_H\right)dP(\omega)I^{-1}c_1\right) && (43)\\
\times&\exp\left(-\frac{1}{2}\int\theta^2(\omega)c_2^\dagger dP(\omega)c_2\right) && (44)
\end{aligned}
$$

ここで、真空のテンソル積分解 $|0\rangle\in F(H)\sim|0\rangle_{\mathrm{Im}(I)}\otimes|0\rangle_{\mathrm{Im}(I)^\perp}\in F(\mathrm{Im}(I))\otimes F(\mathrm{Im}(I)^\perp)$ を使っている。これをみると、最初の項はドリフト項、次の項は Poisson 過程、3つ目は Gauss 過程として振る舞うことがわかる。特性 (汎) 関数が乗法的になっているため、この 3 成分の分解は独立なものである。したがって、q-Levy 過程は q-Gauss 過程と q-Poisson 過程の (真空の場合に独立な) 和として書ける。q-Poisson のときと係数を比較すると、この分解での Poisson 過程のパラメータが $I^{-1}c_1$(の $dP(\omega)$ での大きさ) であることがわかる。

I と dP は可換としたので、これの結合 PVM を考えることができる。$I(\omega)dP(\omega)=\int jdP(j,\omega)$ であるような同時 PVM を取ったとしよう。このとき、$c_1^\dagger I^{-1}dP(j,\omega)I^{-1}c_1$ を ω について積分すれば、ジャンプ幅 j のその期間で発生期待値に他ならない。これは通常 Levy 測度と呼ばれるものである。

オリジナルの Levy-Khintchine 公式について詳しい人は、そのどの部分が上式のどの部分に対応するのか考えてみてください。[2]

6 Ito 公式

以下では $\Omega=\mathbb{R}$ とし、その要素も t で書く。Ito 公式とは、確率過程を可微分関数で写像したときに、その増分を表現するものである。つまり、$X(t)$ なる確率過程があるとして、$f(X(t))$ の微分形を与えるものである。現在確率変数が作用素で表現されているから、これを関数で写像するには、関数カルキュラスを行えばいいが、解析/連続/可測関数カルキュラスの代わりに “フーリエ変換” カルキュラスをする。

[2] 筆者は全く詳しくないので...

6.1 スペクトル展開せずに関数に突っ込みたい

X を自己共役作用素とし、f を実数上の適当な関数とする。$f(X)$ を計算する代わりに次のように処理する。まず、f をフーリエ変換する。

$$f(x) = \int \widehat{f}(p)\exp(ipx)dp \tag{45}$$

もし、$\exp(ipX)$ なる作用素が計算できるなら、$f(X)$ は、

$$f(X) = \int \widehat{f}(p)\exp(ipX)dp \tag{46}$$

としてよい。$\exp(ipX)$ は特性作用素に他ならないので、結局

$$f(X) = \int \widehat{f}(p)\Phi_X(p)dp \tag{47}$$

としてよい。

6.2 Gauss 過程についての Ito 公式

さて、$dW(t)$ を q-Gauss 過程とする。f を実数上の関数とする。この増分を計算しよう。

$$\begin{aligned} & df(W(t)) && (48)\\ =& f(W(t)+dW(t)) - f(W(t)) && (49)\\ =& \int \widehat{f}(p)\exp(ip(W(t)+dW(t))) - \exp(ipW(t))dp && (50)\\ =& \int \widehat{f}(p)\exp(ipW(t))(\exp(ipdW(t))-1)dp && (51)\end{aligned}$$

ここで、$\exp(ipdW(t))-1$ を近似したい。近似の時に重要なのは、どのような評価と極限で一致するのかということだが、ここでは dt 区間での真空 $|0\rangle_{dt}$ での評価として漸近的に一致することが重要である。[3] dt が小さくなると dW の分布は 0 に集中していく。そこで

$$\exp(ipdW(t)) \simeq 1 + ipdW(t)\dots \tag{52}$$

としたくなる。しかし実際には、ここは 1 次ではなく、2 次までとらなくてはならない。[4]

$$\exp(ipdW(t)) \simeq 1 + ipdW(t) - \frac{1}{2}p^2(dW(t))^2 \tag{53}$$

---

[3] Fock 空間では $F(A\oplus B) = F(A)\otimes F(B)$ が成り立つ。真空はこの意味で乗法的であり、かつ $dW(t)$ は dt 区間に対応するテンソル成分でしか値を取らないので、dt 部分の真空でのみ評価すればよい。

[4] より高次の項はいらないのか？と気になるが、要らない。$dP(t)$ が $dP(t)^2$ や $dP(t)JdP(t)$ 以外の形で高次になればそれは $dP(\omega)g$ の高次の量になって無視される。

実際

$$(dW(t))^2 = da_-(g^\dagger)(t)da_+(g)(t) + da_+(g)(t)da_-(g^\dagger)(t) + o(dt) \tag{54}$$
$$= dN(gg^\dagger)(t) + g^\dagger dP(t)g + o(dt) \tag{55}$$

となり、dt の 1 次が残る。これを用いると、

$$\int dp\widehat{f}(p)\exp(ipW(t))\left(ipdW(t) - \frac{1}{2}p^2 dN(gg^\dagger)(t) - \frac{1}{2}p^2 g^\dagger dP(t)g\right) \tag{56}$$

だが、真空ベクトルで評価する場合は $dN(gg^\dagger)(t)$ を無視できる。ip が掛かっている部分は f の導関数のフーリエ変換と捉えることができるので、結局

$$df(W(t)) \tag{57}$$
$$\sim \int dp\widehat{f}(p)\exp(ipW(t))\left(ipdW(t) - \frac{1}{2}p^2 g^\dagger dP(t)g\right) \tag{58}$$
$$= f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))g^\dagger dP(t)g \tag{59}$$

これは Ito の公式に他ならない。参考までに通常の Ito の公式は、dW の二次変動を $d\langle W\rangle$ として

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))d\langle W\rangle(t) \tag{60}$$

である。つまり、$g^\dagger dP(\omega)g$ には、これが表す Gauss 過程の二次変動の意味があったことになる。

6.3 Poisson 過程についての Ito 公式

同様に $d\Pi(t)$ を q-Gauss 過程とする。f を実数上の関数として

$$df(\Pi(t)) \tag{61}$$
$$= f(\Pi(t) + d\Pi(t)) - f(\Pi(t)) \tag{62}$$
$$= \int \widehat{f}(p)\exp(ip(\Pi(t) + d\Pi(t))) - \exp(ip\Pi(t))dp \tag{63}$$
$$= \int \widehat{f}(p)\exp(ip\Pi(t))(\exp(ipd\Pi(t)) - 1)dp \tag{64}$$

となり、$(\exp(ipd\Pi(t)) - 1)$ を $|0\rangle_{dt}$ での評価で近似する必要がある。$dt \to 0$ での $d\Pi$ の分布の変化は q-Gauss の時とは異なるため、別の近似式を考える必要がある。やや天下りだが、結果からいうと、次の近似を採用する。

$$\exp(ipd\Pi(t)) - 1 \simeq (\exp(ipJ(t)) - 1)d\Pi(t) \tag{65}$$

この近似が適切であることを確認しよう。それには dt 区間での真空 $|0\rangle_{dt}$ において、この二式が $o(dt)$ をのぞいて一致することを見れば良い。$d\Pi(t)$ はパラメー

タ $l^\dagger dP(t)l$ の Poission 分布なので、$o(dt)$ を無視すれば、2 粒子以上の状態は捨てられ、

$$
\begin{aligned}
{}_{dt}\langle 0|\exp(ipd\Pi(t))|0\rangle_{dt} \sim& \exp(-l^\dagger dP(t)l)(1+l^\dagger \exp(ipJ(t))dP(t)l) && (66)\\
{}_{dt}\langle 0|(\exp(ipd\Pi(t))-1)|0\rangle_{dt} \sim& -l^\dagger dP(t)l + l^\dagger \exp(ipJ(t))dP(t)l && (67)
\end{aligned}
$$

同様にもう一方も

$$
\begin{aligned}
&{}_{dt}\langle 0|(\exp(ipJ(t))-1)d\Pi(t)|0\rangle_{dt} && (68)\\
\sim& \exp(-l^\dagger dP(t)l)(l^\dagger(\exp(ipJ(t))-1)dP(t)l) && (69)\\
\sim& -l^\dagger dP(t)l + l^\dagger \exp(ipJ(t))dP(t)l && (70)
\end{aligned}
$$

となって一致する。そこで、この近似を採用して計算を進めると、$\exp(ipJ(t))$ は f の値をジャンプ幅 $J(t)$ だけ進めると捉えることができ、

$$
\begin{aligned}
&df(\Pi(t)) && (71)\\
=& \int \widehat{f}(p)\exp(ip\Pi(t))(\exp(ipd\Pi(t))-1)dp && (72)\\
\sim& \int dp\widehat{f}(p)\exp(ip\Pi(t))(\exp(ipJ(t))-1)d\Pi(t) && (73)\\
=& (f(\Pi(t)+J(t))-f(\Pi(t)))d\Pi(t) && (74)
\end{aligned}
$$

となる。これはジャンプ過程の Ito 公式として知られるものである。通常のジャンプ過程の Ito 公式は

$$
df(\Pi(t)) = (f(\Pi(t))-f(\Pi(t-0)))d\Pi(t) \tag{75}
$$

のように、左極限を使って書かれるが、Fock 空間で考える場合はサンプルパスの議論を利用できない。このため、$J(t) = dP(t)JdP(t)$ を使って直接ジャンプ幅を表現している。

References

[1] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Quantum Ito's formula and stochastic evolutions, Comm. Math. Phys. Volume 93, Number 3 (1984), 301-323.