ベクトルバンドルのリー微分による場の Noether 定理

@phykm

2018 年 6 月 5 日

概要

作用積分の変分によって、基本方程式であるオイラーラグランジュ方程式を導出し、Noether 定理を示す一連の議論は、ラグランジュ形式のコア部分とも言える。解析力学はこの議論を「座標/自明化によらない」やりかたで行うことにその本質の一部がある。したがって、作用変分の議論は、なんらかの意味で「幾何化」されるべきである。しかしその形式論は、典型的な場の理論の記述において不十分であり、とくに Noether の定理の証明は不透明な記述が多く見受けられる（と筆者は思う）。ベクトルバンドルのリー微分を導入することで、これを微分幾何的な議論として書き直し、より見通しのよい計算に置き換えることを考える。

1 プロトタイプ

標準的な課程で教えられる、ラグランジュ形式のコア議論は次のようなものである。ある実数値座標 q^i で書かれる系があるとする。ラグランジアン $L(-,-)$ に関する作用

$$S = \int_I L(q^i, \dot{q}^i)dt \tag{1}$$

について、その微分を含めて大きさが一様にバウンドされるような任意の変化 δq^i について、この変分が

$$\delta S = \int_I (\delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} L + \delta \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})dt \tag{2}$$

$$= [\delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}]_I + \int_I dt \delta q^i (\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}) \tag{3}$$

と計算できる。もしここで、δq^i が今考えている軌道端点でゼロであれば、停留条件 $\delta S = 0$ から、オイラー=ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \tag{4}$$

が導かれる。そうでない一般的な微小変化について、オイラーラグランジュ方程式が成り立っていれば、

$$[\delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}]_I = 0 \tag{5}$$

より、Noether モーメント $\delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ が運動の保存量となる。この場合の δq^i とは正確には変換の生成子であって、実際にはこれに十分小さい ϵ をかけたもので変分をとっていることに注意。

場の理論でもほぼ同じ議論が行われる。すなわち、時空 $\mathbb{R}^n$ 上の実数値多成分場 ϕ^i で表現される系があるとする。ラグランジアン密度 $L(-,-)$ に関する作用

$$S = \int_M L(\phi^i, \partial_j \phi^i)dx^n \tag{6}$$

について、その微分を含めた大きさが一様にバウンドされるような任意の変化 $\delta\phi^i$ についての変化が

$$\delta S = \int_M \delta\phi^i \frac{\partial L}{\partial \phi^i} + \delta\partial_j\phi^i \frac{\partial L}{\partial\partial_j\phi^i} dx^n \tag{7}$$

$$= \int_{\partial M} \delta\phi^i \frac{\partial L}{\partial\partial_j\phi^i}(dx^{n-1})_j + \int_M \delta\phi^i (\frac{\partial L}{\partial\phi^i} - \partial_j \frac{\partial L}{\partial\partial_j\phi^i}) dx^n \tag{8}$$

と計算できる。$\delta S = 0$ より運動方程式がオイラー＝ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial\phi^i} - \partial_j \frac{\partial L}{\partial\partial_j\phi^i} = 0 \tag{9}$$

となる。Noether の議論も、端点条件を外せば

$$\int_{\partial M} \delta\phi^i \frac{\partial L}{\partial\partial_j\phi^i}(dx^{n-1})_j = 0 \tag{10}$$

なので、カレント保存

$$\partial_j \delta\phi^i \frac{\partial L}{\partial\partial_j\phi^i} = 0 \tag{11}$$

となる。ここで $(dx^{n-1})_j$ は j 成分を抜いた $n-1$ 次元の無限小積分領域と思えばよい。$\delta\phi^i$ は同様に変換生成子であり、実際の変分はこれに十分小さな ϵ をかけて行われ、δS はその一次係数である。

この議論は単純で、有限自由度のときとのアナロジーも明確である。以上の議論の本質的な部分は部分積分であって、両者の違いは一次元か多次元かだけに見える。

しかし、おそらく場の量子論の前駆としての記述などで、場の Noether 定理を学んだ人なら、これが Noether 定理の最も単純なバージョンであることに合意してくれると思う。つまり、これより複雑な Noether 定理が存在するのだ。ところが、直観的には以上の二つの議論のアナロジーはまったく完璧で、後者にバリエーションが生じる余地など無いように見える。なぜこのような事が起きるのか？　また、それを含めて、以上の議論を「座標系/自明化によらない」という解析力学の理念に沿った形に書き直すには、どうすればいいのか？
これを考える。

2　有限自由度

有限自由度の解析力学が、「座標系によらない」ということを主張するにはどうすべきだろうか？　初等的には、実数変数 q^i を、同次元の微分同相写像で引き戻し、ラグランジアンに対する変分問題がこの影響を受けないことを示すことである。$p^j = f^j(q)$ を微分同相として、$\dot{p}^j = df^j_i \dot{q}^i$ であり、また変分が十分小さければ $\delta p^j = df^j_i \delta q^i$ である。オイラーラグランジュ方程式がこの df について共変であることを示すことができる。したがって、作用の変分を

$$dS = [\delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}]_I + \int_I dt \delta q^i (\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}) \tag{12}$$

$$= [\delta p^j \frac{\partial L}{\partial \dot{p}^j}]_I + \int_I dt \delta p^j (\frac{\partial L'}{\partial p^j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{p}^j}) \tag{13}$$

と書くことができて、この議論は微分同相変換の影響をうけないことがわかる。ただし、ここで L' は L の f^{-1}, df^{-1} による引き戻しである。

物理学者であれば、このような数式が「座標変換」であって、「本質的に物理的状況は変わっていない」ことを了解できるが、そのことはここまでの数学的道具立てのどこにも表現されていない。「本質的に変わっていない」というが、そもそも変わっていない「もの」とは何か？である。もちろん、定式化することはできて、それは配位多様体である。配位という修辞は、これが物体の位置や配置の自由度をあらわすという物理的ニュアンスをこめたもので、数学的には唯の可微分多様体にすぎない。

しかし配位多様体だけでは足りない。力学理論は運動を決定するために位置と速度を参照するので、力学系の「状態」空間としては、配位のほかに速度もいる。そこで配位多様体 N の接バンドル TN をとる。すなわち、接ベクトル空間を全て合併した多様体である。ラグランジアンはこの位置と速度をあわせた状態に対して値が決まるのだから、ラグランジアンの型は $L : TN \to \mathbb{R}$ である。

ここで、表記上の約束をしよう。接バンドルは、もとの配位多様体が n 次元であれば、$2n$ 次元の多様体であり、かつベクトルバンドルである*1。多様体であるから、チャートを考えることができるが、もとの配位多様体 N から誘導される自然なそれを考えたい*2。N のチャートを $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ とし、この各成分を $x^i(q) = \phi^i(q)$ とする。このとき、接バンドルに $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ なる局所標構が入ので、これによる成分表示を考えることができる。そこで、N のチャート $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ に基づく TN のチャート $\overline{\phi} : \cup_{q \in U} TN_q \to \mathbb{R}^{n+n}$ を $\overline{\phi}(v) = (\phi(q), v^i)$ とする。ここで $v \in TN_q, v = v^i \partial_{x^i}$ である。

接バンドルが舞台であるとわかったが、それでは運動とはなんだろうか？　ここでは運動を 2 つの意味で考えることができる。それは時間パラメトライズされた特定の軌道か、「状態」の (つまり接バンドルの) 1 パラメータ変換群か？　である。どちらを考えてもよいが、いずれにせよ、それがもとは N 上の運動であることによる性質をもつ。$\pi : TN \to N$ を射影とする。TN 上の軌道とは、$c : I \to TN$ であって、

$$\frac{d}{dt}\pi \circ c(t) = c(t) \tag{14}$$

を満たすものとする。ここで多様体上の曲線 $d(-)$ に対してその微分を $\frac{d}{dt}d(t) = \frac{d}{dt}\phi^i(d(t))\partial_{x^i}$ で定めるものとする。この条件は次のように述べてもよい。先に宣言した接バンドルのチャートを用いたときに、

$$\frac{d}{dt}c(t) = v^i \partial_{x^i} + a^i \partial_{v^i} \ , \ \overline{\phi}(c(t)) = (\phi(\pi(c(t))), v^i) \tag{15}$$

となるものである。つまり、TN 上の運動について、その N 上の位置を変える方向の速度ベクトルは、まさにその点の速度成分に一致する。

運動を TN 上の 1 パラメータ変換群とする場合でも同様である。$X \in \Gamma(TTN)$ を、この生成ベクトル場とする。X は次の条件を満たさなくてはいけない。

$$X(v) = v^i \partial_{x^i} + a^i \partial_{v_i} \tag{16}$$

ここで、v^i は $\overline{\phi}(v) = (\phi(\pi(v)), v^i)$ の成分からくる。

最後に微小変化を考えよう。プロトタイプの議論を考えれば、明らかにこれは配位多様体の変化だとわかる。つまり、N の 1 パラメータ変換群を考えている。それは N 上のベクトル場 $Y \in \Gamma(TN)$ によって引き起こされるが、この微分写像を考えることで、TN 上の 1 パラメータ変換群、およびその生成ベクトル場 $\overline{Y} \in \Gamma(TTN)$ を誘導する。N 上において

$$Y(q) = Y^i(q)\partial_{x^i} \tag{17}$$

*1 ベクトルバンドルの定義は後に導入する。

*2 そしてこれはベクトルバンドルの自明化写像のそれの資格ももつ。

であれば、

$$\overline{Y}(v) = Y^i(\pi(v))\partial_{x^i} + v^j(\partial_{x^j}Y^i)\partial_{v^i} \tag{18}$$

である。

それでは変分の議論をしよう。運動を特定の軌道と考えるか、TN 全体の変換と考えるかは、ここでの計算においては X, Y の定義域を軌道上に制限するかどうかの違いしかないので、ここでは TN 全体の変換として考える。変分は Y に基づくリー[*3]微分を考えればよい。

$$\begin{aligned}
L_{\overline{Y}}L =& \frac{\partial L}{\partial x^i}Y^i(v) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(v^j\partial_{x^j}Y^i) && (19)\\
=& \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(v) - (v^j\partial_{x^j} + a^j\partial_{v^j})\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)Y^i + v^j\partial_{x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}Y^i\right) + \left(a^j\partial_{v^j}\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)Y^i && (20)\\
=& \langle\mathbb{EL}_{\mathbb{X}}|\overline{Y}\rangle + L_X\langle\theta|\overline{Y}\rangle && (21)
\end{aligned}$$

$L_{(-)}$ は添字のベクトル場によるリー微分を表す。途中 Y^i が速度に依存しないことを用いた。運動のベクトル場の成分表示を $X = v^i\partial_{x^i} + a^i\partial_{v^i}$ としており、また、ラグランジュ方程式の共変性から定義できる次の TN 上 1 形式を使っている。$\langle -|-\rangle$ は双対内積である。

$$\begin{aligned}
\mathbb{EL}_X =& \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - L_X\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)dx^i \in \Gamma(T^*TN) && (22)\\
\theta =& \frac{\partial L}{\partial v^i}dx^i \in \Gamma(T^*TN) && (23)
\end{aligned}$$

作用は運動生成子 X の積分軌道に沿った積分であるから、作用の Y による第一変分はこの式を X 積分軌道上で積分すればよい。Y が軌道端点で 0 であれば、その点で $\langle\theta|\overline{Y}\rangle$ はゼロであるので、オイラーラグランジュ方程式 $\mathbb{EL}_X$ がなりたち、逆にオイラーラグランジュ方程式が成り立つなら、$L_X\langle\theta|\overline{Y}\rangle = 0$ すなわち、運動に伴って Noether モーメント $\langle\theta|\overline{Y}\rangle$ は保存する。

なお、[1] ではさらに、ハミルトニアンを

$$H = v^i\frac{\partial L}{\partial v^i} - L \tag{24}$$

で定義することで

$$\mathbb{EL}_X = \langle d\theta|X, -\rangle + dH \tag{25}$$

が成り立つことから、運動生成ベクトル場 X に対する

$$\langle d\theta|X, -\rangle + dH = 0 \tag{26}$$

を幾何学的ラグランジュ方程式と呼んでいる。

3　場の場合

場の場合、そもそも場の自由度の幾何学的表現とは一体何か？　という問題がある。筆者が思うかぎり、現時点でほとんどの場の理論と呼ばれるものは、次のベクトルバンドルの例になっているように思われる。

[*3] 今はラグランジアンがスカラー関数であるのでこう呼ぶ必要はないが、後に場のラグランジュ形式ではこの部分が実際にリー微分になるので合わせておく。

Definition 3.1. N を多様体とする。N 上の m 次元ベクトルバンドルとは、$n+m$ 次元多様体であって、射影 $\pi: E \to N$ をもち、$q \in N$ ごとに $\pi{-}1(q)$ は m 次元ベクトル空間であるようなもので、さらに次のようなアトラスをもつものをいう。このチャートは $U \subset N, \overline{\psi}: \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{n+m}$ のような型をもち、$\overline{\psi} = (\phi, \psi)$ としたとき、ϕ は U を定義域にもつ N のチャートであり、$q \in U$ ごとに $\psi|_{\pi^{-1}(q)}$ は $\pi^{-1}(q) \sim \mathbb{R}^m$ の間の線形同型である。[*4]

このチャートについて、$q \in U, e_i(q) = \overline{\psi}^{-1}(\phi^{-1}(q), e_i)$ を局所標構とよぶ。ここで e_i は $\mathbb{R}^m$ の標準基底とする。

ベクトルバンドル E の（可微分）切断とは、$X: N \to E$ であって、$\pi \circ X = \mathrm{id}_N$ となるもののこととする。E の切断全体を $\Gamma(E)$ と書く。

文献によって定義に微妙な差があるかもしれないが、基本的な考えは、局所的にある構造（ここではベクトル空間）が各点に生えているとみなせるような多様体である。それは多様体における座標と同様に、「成分表示」できる。上の ϕ がそれである。これを局所自明化というが、ポイントは多様体同様、この自明化が大域的にできることまでは要求しないということである。つまり、「成分表示」が恣意的なものであるという自覚をもっている。

このベクトルバンドル（あるいはベクトルであるという条件を外したければ、一般のファイバーバンドルでもよいかもしれない）の切断という概念は、物理学者が考える「場の量」というものの直感に完全に合致している。それは局所自明化を用いて成分表示できる。それは各点に値をもつ。そしてそのもつ「値」は基本的に各点で共通の構造の要素である。

一般性を考えれば、ベクトル空間以外のバンドルがあってもいいはずだが、通常場の理論と言った場合、物理学者が考える場の量の自由度は基本的にベクトルバンドルである。したがって、ここでもベクトルバンドルを考えていく。

場の自由度がベクトルバンドルの切断であることがわかったが、有限自由度のように「運動」や「速度」がなんであるか、というのを考えるのは難しい。つまり、場の量にとっての「運動」「速度」とはなんなのか？ということである。そのような巨大な多様体を考えることが可能なのかわからないが、ひとまず経験則的に、場のラグランジュ理論は運動項を持っている。つまり、ベクトルバンドルの微分である。

Definition 3.2. ベクトルバンドルの共変微分とは、$D: \Gamma(E) \to \Gamma(T^*N \otimes E)$ の線形写像で、$f \in C^\infty(N)$ の乗法についてのライプニッツルールを満たすもののこととする。

$$D(fX) = df \otimes X + fDX \tag{27}$$

ベクトルバンドルの局所自明化が複数ある時、その共通定義域における $GL(m)$ 値場がその変換をうけもつ。具体的には $\overline{\psi}_a : \pi^{-1}(U_a) \to \mathbb{R}^{n+m}, \overline{\psi}_b : \pi^{-1}(U_b) \to \mathbb{R}^{n+m}$ について、$\Lambda_{ba}(q) = \psi_b \circ \overline{\psi}_a^{-1}(\psi_a^{-1}(q), -)$ がそれである。

ベクトルバンドルの共変微分を定義するには、この局所自明化間の変換に対して次のように振る舞う局所的な行列値 1 形式があればよい。

$$\omega_a = \Lambda_{ba}^{-1} d\Lambda_{ba} + \Lambda_{ba}^{-1} \omega_b \Lambda_{ba} \tag{28}$$

[*4] このチャートは可微分な $GL(m)$ 値の場を作用させることで増設できることに注意。

これを利用すれば、成分レベルで、

$$DX = (dX^i + X^j \omega_j^i) \otimes e_i \tag{29}$$

とできる。

ラグランジアン密度の型を考えよう。場の量とその運動項に関して各点での値を参照し、最終的に多様体上でスカラー値へ積分されるものになる。多様体上での「被積分」対象といえば、最高次の微分形式にほかならない。したがって、ラグランジアンを次のように定めよう。$q \in N$ ごとの $L_q : \pi^{-1}(q) \times T^*N_q \otimes \pi^{-1}(q) \to \wedge^n T^*N_q$ の型の写像[*5]の族で、$E, T^*N \otimes E$ の局所自明化に関して可微分なものとする。ここでの可微分性とは、N の座標、$E, T^*N \otimes E$ の自明化を全て行った時に

$$x^i \in \mathbb{R}^n, v^i \in \mathbb{R}^m, w_j^i \in \mathbb{R}^{n+m} \mapsto L_{\phi^{-1}(x^i)}(v^i e_i(\phi^{-1}(q)), w_j^i dx^j \otimes e_i(\phi^{-1}(q))) \tag{30}$$

という関数が x^i, v^i, w_j^i すべてについて可微分であることを意味する。$\{L_q\}_q$ をまとめて L と書き、$X \in \Gamma(E), DX \in \Gamma(T^*N \otimes E)$ について $L(X, DX) \in \Gamma(\wedge^n T^*N)$ で、$q \mapsto L_q(X(q), DX(q))$ を書くとする。ラグランジアンは X, DX の成分についても可微分としたので、この微分係数を考えることができる。X についての微分係数に適当な局所標構を入れたものは、自明化によらず双対バンドルの切断として振る舞う。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial X} L(X, DX) = \frac{\partial L}{\partial X^i}(X, DX) e^{*i} \in \Gamma(E^* \otimes \wedge^n T^*N) \tag{31}$$

を考えることができる。ここで e^{*i} は局所標構 e_i の双対基底である。

DX についても同様のことを考えられるが、こちらは単純に微分してしまうと微分形式の次数が n を超えてしまうので、少し工夫がいる。次のように定義する。

$$L(X, DX) = L_0 dx^1 \wedge dx^2 ... dx^n \tag{32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial DX}(X, DX) = \langle \frac{\partial L_0}{\partial D_i X^j} \partial_i \otimes e^{*j}, dx^1 \wedge dx^2 ... dx^n \rangle_I \quad \in \Gamma(E^* \otimes \wedge^{n-1} T^*N) \tag{33}$$

ここで $\langle -, - \rangle_I$ は微分形式とベクトル場の内部積である[*6]。

これらの定義は、通常の微分の直感に叶う。どういうことかというと、X, DX が微小変換した際[*7]、その変化を $\delta X, \delta DX$ としたら、その一次は

$$\delta L = \langle \frac{\partial L}{\partial X}, \delta X \rangle_E + \langle \frac{\partial L}{\partial DX} \wedge \delta DX \rangle_E \tag{34}$$

と書けるということである。ここで $\langle -, - \rangle_E$ は E の双対内積、$\langle - \wedge - \rangle_E$ はそれに加えて微分形式の足について外積を実行するものである。

さて、残り定義しなくてはいけないのは、場の量の「微小変換」である。一体場の微小変換とはなんだろうか？　プロトタイプで議論したような $\delta\phi$ つまり、各点でのファイバーの微小変化だけでは、一般的な Noether にはたどり着けない。

しばし場の理論の教科書では、次のような記法で、場の微小変換を指示する。

$$x \mapsto y = x + dx \tag{35}$$

$$\phi(x) \mapsto \phi(y) = \phi(x) + d\phi \tag{36}$$

*5 ここで線形性を捨てていることに注意

*6 内部積は、微分形式の先頭要素とベクトル場の双対内積をとる。

*7 この微小変化の一般的な定義は後で与える。

はっきりいって意味不明である。筆者はこのような記述だけでは一体何をどうしているのか皆目検討がつかず、しかし微分幾何の入門書を見てもこのタイプの変換の「型」を見つけることができなかった。

これは実際には以下で定義するベクトルバンドルのリー微分を考えることで理解出来、またこのタイプの変換から来る Noether カレントも、そのリー微分と一般的なチェインルールから書き下すことができる。

そこで、ベクトルバンドルのリー微分を定義することを考えよう。そもそもリー微分とはなんだったか？

多様体上のリー微分とは、通常ベクトル場ないし微分形式に対して定義される。これらに対するリー微分は、ベクトル場から定義することができ、それは以下のようになる。$\exp(tX)$ を X を積分することで得られる 1 パラメータ変換群とし、$d\exp(tX)$ をその微分写像とする。

$$L_X T(q) = \frac{d}{dt} d\exp(tX) T(\exp(-tX)q) \tag{37}$$

この定義のポイントは、変換が単なる引数のシフト（$\exp(-tX)q$ のこと）だけでなく、それを元の点の要素と比較可能にするために同一点に $d\exp(tX)$ によって戻していることである。つまり、異なるファイバーに移すという操作が起きている。これはベクトル場や微分形式に関しては、多様体の微分同相写像がその変換を誘導するため、ベクトル場だけで定義できているが、一般のベクトルバンドルに関してはこれだけでは不足である。

それでは、一般のベクトルバンドルについてのリー微分/微小変換を考えるにはどうしたらよいだろうか？まずベクトルバンドルの間の射を考える必要がある。

Definition 3.3. ベクトルバンドル $\pi_1 : E_1 \to N_1, \pi_2 : E_2 \to N_2$ の間の射とは、可微分写像 $f : E_1 \to E_2, f_0 : N_1 \to N_2$ の組で、次の可換図式を満たすものとする。

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ N_1 & \xrightarrow{f_0} & N_2 \end{array} \tag{38}$$

直感的には、ファイバーの移り先に対する整合性を満たすことを意味する。

この変換は、たとえばプロトタイプで議論した単純な $\delta\phi$ よりも広い。リー微分のように、底空間の変換も許される。

このような変換の無限小版を考えたい。もう一度通常のリー微分に戻ってみよう。1 形式とベクトル場の微分写像を考えてみる。ベクトル場 X があるとき、底空間上の微小変換は $X = X^i\partial_i$ という成分表示を考えたとき、$x \mapsto y^i = x^i + \epsilon X^i$ だ。より正確には、このベクトル場は次の常微分方程式を定める。

$$\frac{d}{dt} x^i(q(t)) = X^i(q(t)) \tag{39}$$

これは座標によらない。一方で、1 形式に対しては、$\omega = \omega_i dx^i$ に対して、$\omega_i \mapsto \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\omega_j = \omega_i + \epsilon(\partial_i X^j)\omega_j$ となる。正確には、$U(t) : T^*N_{q(0)} \to T^*N_{q(t)}$ なる線形同型写像についての微分方程式として、

$$\frac{d}{dt} U^i_j(t) = (\partial_j X^k) U^i_k \tag{40}$$

が定まる。同様にベクトル場であれば、$Y^i \mapsto \frac{\partial y^i}{\partial x^j} Y^j = Y^i + (\epsilon\partial_j X^i)Y^j$ であり、$V(t) : TN_{q(0)} \to TN_{q(t)}$ の微分方程式は

$$\frac{d}{dt} V^i_j(t) = (\partial_k X^i) V^k_j \tag{41}$$

となるだろう。すると、一般のベクトルバンドルについての、微小変換つまり、ベクトルバンドルの自己同型の生成子として、次のようなものを考えたくなるかもしれない。すなわち、$TN \oplus E \otimes E^*)$ の切断ではないか、と。

しかし実際にはそうではない。上記の例をみるとベクトルバンドルの変化を表す $\partial_i X^j$ は、$T^*N \otimes TN$ の成分のようには振る舞わない。この事情は共変微分に似ている。∂_i がついているため、余計な項がでてしまう。

逆に言えば、共変微分で ω^i_j から接続を定義するように、ベクトルバンドルの自明化に依存したものとして特殊な変換規則を盛り込んでしまえば、ベクトルバンドルの微小変換生成子を定義できることになる。そこで次のような定義をする。

Definition 3.4. m 次元ベクトルバンドル E の微小変換生成子を、E の局所自明化 $\{\overline{\psi_a} : \pi^{-1}(U_a) \to \mathbb{R}^{n+m}\}_a$ ごとに定義された TN と $n \times n$ 行列の局所的な直和バンドル $TN_{U_a} \oplus \mathbb{R}^{m\times m}$ の切断であり、次のような局所自明化についての貼り合わせ条件を満たすものとする。E の異なる局所自明化による、共通定義域上の $GL(m)$ 値場 $\Lambda(q)$, $q \in U_a \cap U_b$ について、$q \in U_a \cap U_b$ 上

$$(X(q), M_b) = \quad (X(q), (X(q)\Lambda(q))\Lambda^{-1}(q) + \Lambda(q)M_a\Lambda^{-1}(q)) \tag{42}$$

ただし、$(X(q)\Lambda(q))$ はベクトル場 X による微分である。この貼り合わせ条件をみたす $\{(X, M_a)\}_a$ は線形空間をなす。

この張り合わせ条件は、先の $\partial_i X^j$ の変換則を模している。実際これによって、ファイバーの変換行列 $U(t) : \pi^{-1}(q(0)) \to \pi^{-1}(q(t))$ について、自明化を用いたこの微分方程式

$$\frac{d}{dt}U_a(t) = M_a U_a(t) \tag{43}$$

$$U(t) = \overline{\psi}_a^{-1}(\phi_a^{-1}(q(t)), -)U_a\psi_a|_{\pi^{-1}(q(0))} \tag{44}$$

が、局所自明化によらず、整合的になる。

それではベクトルバンドルのリー微分を定義しよう。切断 $Y \in \Gamma(E)$ に対して、変換生成子 $\{(X, M_a)\}_a$ があるとする。これによって、$x^i \mapsto x^i + \epsilon X^i$ および、ファイバーは $Y^i \mapsto Y^i + \epsilon {M_a}^i_j Y^j$ と変換される。しかしリー微分の定義を見ると一旦 $-X$ で逆方向に移動した点から、もとの点にもって来ているので、同様の定義をするには

$$Y^i(x^i) \mapsto Y^i(x^i - \epsilon X^i) \mapsto Y^i(x^i - \epsilon X^i) + \epsilon {M_a}^i_j Y^j(x^i - \epsilon X^i) \tag{45}$$

となる。適当な滑らかさを仮定して ϵ の高次を考えなければ、$\{(X, M_a)\}_a$ による Y のリー微分は次である。

$$L_{(X,M)}Y = (-(XY^i) + {M_a}^i_j Y^j)e_i \tag{46}$$

実際これがバンドルの自明化によらないことは M_a の変換則が保証している。

ベクトルバンドルのリー微分が定義できた。最後に天下りではあるが、次の条件を考える。

Definition 3.5. ベクトルバンドルの変換生成子 (X, M) がキリングであるとは、共変微分 D に対して $L_{(X,M)}D = DL_{(X,M)}$ のこととする。

この条件は、たとえばリーマン多様体のキリングベクトル場とレヴィチビタ接続であれば実際に満たされる

ようである*8。なお $X=0$ であれば、これは明らかに成り立つことに注意。したがって、ファイバーを移動しない変換ならば、この条件は以下の議論になんの影響も及ぼさない。特に、オイラーラグランジュ方程式の導出には影響しない。この条件は、接続をもつ場についての Noether カレントを導出する際に、全く勝手な微小変化を考えて良いわけではないという制約を課す。

それでは、作用積分の変分を書こう。ベクトルバンドル E の切断 $X \in \Gamma(E)$ および、その共変微分 $DX \in \Gamma(T^*N \otimes E)$ について、ラグランジアン密度 $L(X, DX)$ がある。これを領域 K で積分したものを作用とする。

$$S = \int_K L(X, DX) \tag{47}$$

これを (Y, M) によって、「リー微分」する。チェインルールを用いて、変化しうるのは 3 項である。つまり L 自体の変化と、X, DX である。

$$\begin{aligned} L_{(Y,M)}L =& L_Y L + \langle \frac{\partial L}{\partial X}, L_{(Y,M)}X\rangle_E + \langle \frac{\partial L}{\partial DX} \wedge L_{(Y,M)}DX\rangle_E & (48)\\ =& d\langle Y, L\rangle_I + \langle \frac{\partial L}{\partial X}, L_{(Y,M)}X\rangle_E + d\langle \frac{\partial L}{\partial DX}, L_{(Y,M)}X\rangle_E - \langle D\frac{\partial L}{\partial DX}, L_{(Y,M)}X\rangle_E & (49)\\ =& d\left(\langle Y, L\rangle_I + \langle \frac{\partial L}{\partial DX}, L_{(Y,M)}X\rangle_E\right) + \langle \mathbb{EL}_X, L_{(Y,M)}X\rangle_E & (50) \end{aligned}$$

ここで、$\langle -, -\rangle_I$ はやはり微分形式の内部積である。一般に微分形式の内部積について次が成り立つことを用いている。

$$L_X\omega = \langle X, d\omega\rangle_I + d\langle X, \omega\rangle_I \tag{51}$$

また、双対バンドル E^* の接続は、E と共役なそれを用いている。すなわち、双対内積についての積微分公式 $d\langle X, Y\rangle_E = \langle DX, Y\rangle + \langle X, DY\rangle$ を満たすようなものである。

これより、Y が作用積分の領域境界でゼロであれば、変分ゼロ条件から、オイラーラグランジュ方程式 $\mathbb{EL}_X = 0$ が導出され、一方オイラーラグランジュ方程式が成り立つならば、Noether「形式」

$$\langle Y, L\rangle_I + \langle \frac{\partial L}{\partial DX}, L_{(Y,M)}X\rangle_E \tag{52}$$

が閉形式であることが示される。

参考文献

[1] 山本義隆　解析力学 1　吉岡書店

[2] 小林昭七　接続の微分幾何とゲージ理論　裳華房

[3] 松島与三　多様体入門

[4] Ryoyu Utiyama:Invariant Theoretical Interpretation of Interaction,Phys. Rev. 101, 1597

*8 当初この条件無しで変分を書き切ろうとしていたが、一般的には無理であるように思えたので追加した。バンドルの変換は、一般には接続を無視して実行できるが、もしかしたらなんらかのもっともな理由によって、この条件を正当化できるかもしれない。しかし現時点でそのような議論を思いつかない。