

淡中-Klein 双対定理 ver.3

@phykm

2019 年 3 月 6 日

概要

[1] に基づく、淡中-Klein の定理のノート（改稿版）。Peter-Weyl 定理と、Haar 測度の存在を仮定する。

1 淡中群の構成

Definition 1.1. 位相群とは、位相空間かつ群であり、すべての群演算が連続写像であるようなものとする。コンパクト位相群とは、位相群であって、かつ位相空間としてコンパクトなものとする。

Fact 1.2. (Haar 測度) (局所) コンパクト位相群には、そのボレル族上、自身の左作用で不変な測度が定数倍を除いて存在する。コンパクト群の場合、これは有限測度であって、とくに全測度 1 のものが一意的に存在する。以下これを Haar 測度と呼んで μ でかく。

Definition 1.3. (位相) 群 G のユニタリ表現とは、その群から Hilbert 空間 V 上のユニタリ群 $U(V)$ への強連続準同型 $\pi: G \rightarrow U(V)$ のこととする。とくに V が有限次元であれば、有限次元ユニタリ表現と呼ぶ。^{*1}

群 G の自明表現とは $((g \mapsto 1), \mathbb{C})$ のことをいう。

群 G の表現 $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ の直和表現とは、 $(\pi_1 \oplus \pi_2, V_1 \oplus V_2)$ 、テンソル積表現とは、 $(\pi_1 \otimes \pi_2, V_1 \otimes V_2)$ の事を言う。

群 G の表現 (π, V) の双対表現とは、 $((g \mapsto \pi^*(g^{-1})), V^*)$ 、共役表現とは $((g \mapsto \pi^\dagger(g^{-1})), V)$ の事を言う。

群 G の表現 $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ の間の射とは、 $f: V_1 \rightarrow V_2$ であって、 $f\pi_1(g) = \pi_2(g)f$ であるものをいう。2つの表現の間にユニタリな射があるとき、これらをユニタリ同値であるという。

群 G のユニタリ表現 (π, V) が可約であるとは、 (π, V) が 1 次元以上の表現の直和にユニタリ同値であることをいう。群 G のユニタリ表現 (π, V) が既約であるとは、可約でないこと、また同じことだが、 π 作用による V のいかなる非自明な不変部分空間 ($\{0\}, V$ 以外のこと) も持たないことをいう。群のユニタリ表現が完全可約であるとは、既約表現の直和に分解できることをいう。

Proposition 1.4. (Schur 補題) 有限次元既約ユニタリ表現の間の射は、それらがユニタリ同値であるとき、このユニタリ同型射の定数倍であり、そうでないときゼロである。言い換えれば、既約表現の間の射の成す線形空間の次元は高々 1 であり、1 であるとき、ユニタリ同値である。

Proof. 射であることの条件から、 $\text{Im } f, \ker f$ はともにそれぞれの表現の不変部分空間である。

^{*1} 有限次元の場合は、強連続、弱連続、一様連続の区別は不要。

$$y \in \text{Im} f \Rightarrow \pi_2(g)y = \pi_2(g)fx = f\pi_1(g)x \in \text{Im} f \quad (1)$$

$$x \in \ker f \Rightarrow f\pi_1(g)x = \pi_2(g)fx = 0 \Rightarrow \pi_1(g)x \in \ker \quad (2)$$

$\text{Im} f, \ker f$ が非自明な部分空間であるとき、 V_1, V_2 の既約性に反する。

$\text{Im} f = \{0\}, \ker f = V_1$ であるとき、 $f = 0$ である。 $\text{Im} f = V_2, \ker f = \{0\}$ であるとき、 f は同型である。 $\text{Im} f = \{0\}, \ker f = \{0\}, \text{Im} f = V_2, \ker f = V_1$ はありえない。

ゼロでないとき、 $f^\dagger f : V_1 \rightarrow V_1$ を考えよう。これは正作用素であり、今有限次元を仮定しているので対角化ができる。 $f^\dagger f$ と $\pi_1(g)$ (これは正規である) は可換であるから、この同時対角化を考える。もし $f^\dagger f$ の固有値が複数あれば、 π_1 がブロック対角化されるため、 (π_1, V_1) の既約性に反する。したがって、 $f^\dagger f = \lambda_1$ である。同様に $ff^\dagger = \lambda_2$ である。このとき、 $ff^\dagger f$ を考えれば $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ とおいてよい。したがって、 $\sqrt{\lambda}^{-1}f$ はユニタリである。

以上から、有限次元既約表現の間の射は、ゼロか、ユニタリの定数倍であることが言えた。後者の場合は明らかにユニタリ同値である。また、もしユニタリ同値でなければ、その表現の間の射はゼロしかありえない。さらに、既約表現の間のユニタリは、定数倍を除いて一意である。なぜなら、表現の自己射は、上で見たように id_V の定数倍しかありえず、もし $U, U' : V_1 \rightarrow V_2$ がユニタリであれば、 $U^\dagger U', U'^\dagger U, U'U^\dagger, UU'^\dagger$ はすべて id_V になるからである。□

Proposition 1.5. コンパクト位相群の有限次元ユニタリ表現は完全可約。また、その直和分解は一意的である。

Proof. 非自明な不変部分空間を持たないなら、それは既約である。表現 (π, V) が不変部分空間 $W \subset V$ をもつとき、この直交補空間もまた不変部分空間である。

$$x \in W, y \in W^\perp \Rightarrow \langle x, \pi(g)y \rangle = \langle \pi(g^{-1})x, y \rangle = 0 \quad (3)$$

したがって、 $V \simeq W \oplus W^\perp$ における $\pi(g)$ の非対角成分はなく、 (π, V) は、その $W, W^\perp$ 制限の直和表現である。これを繰り返すと、個々の直和成分の次元は下がっていくので、有限回のステップですべてが既約表現か、1次元表現になる。この直和分解が複数あるとする。それは有限個だが、含まれる既約表現の種類と数が一致しない場合、この分解はユニタリになりえない。よって、直和分解は一意的である。□

Corollary 1.6. コンパクト群 G の有限次元ユニタリ表現とその射のなす圏を $\text{Rep}(G)$ とする。 $\text{Rep}(G)$ は、半単純な *Biproduct-Dagger-Compact-Monoidal-Category* である。言い換えれば、 $\oplus, \otimes, \dagger, (-)^*, 1 (= \mathbb{C})$ を持ち、それらの適切な結合、分配関係などが満たされ、かつすべての対象が既約なそれにユニタリ同型を除いて一意的に直和分解できる。

Definition 1.7. コンパクト位相群 G に対する淡中群 $T(G)$ を、忘却関手 $U : \text{Rep}(G) \rightarrow \mathbf{FinHilb}$ の、 $\otimes, (-)^*$ を保つ自己自然変換全体とする。すなわち、これらのコンポーネントは対象 $((g \mapsto$

$1), \mathbb{C}), (\pi_\lambda, V_\lambda), (\pi_\sigma, V_\sigma) \dots$ を $1, \lambda, \sigma \dots$ でかくとき、

$$\alpha : U \Rightarrow U \quad (4)$$

$$\alpha_{\lambda \otimes \sigma} = \alpha_\lambda \otimes \alpha_\sigma \quad (5)$$

$$\alpha_1 = 1 \quad (6)$$

$$\alpha_{\lambda \oplus \sigma} = \alpha_\lambda \oplus \alpha_\sigma \quad (7)$$

$$\alpha_0 = 0 \quad (8)$$

$$\alpha_{\lambda^*} = \alpha_\lambda^{-1*} \quad (9)$$

$$\alpha_{\lambda^\dagger} = \alpha_\lambda^{-1\dagger} \quad (10)$$

を満たすものとする。ここで、 α_0 は、ゼロ表現である。 $T(G)$ の位相を $\text{Rep}(G)$ のすべての対象についての *Endomorphism* の位相の直積位相とする。とくに、 $T(G)$ の元のコンポーネントはユニタリであるから、 $T(G)$ はコンパクト群である。

Proposition 1.8. 以上の $T(G)$ の条件のうち、 $\otimes, 1$ さえ仮定すれば、コンポーネントの可逆性と、 $\oplus, 0$ についての条件が自動的に成り立つ。

Proof. 表現 (π_λ, V_λ) 上の双対内積は、 $\eta_\lambda : \lambda^* \otimes \lambda \rightarrow 1$ の射をなす。したがって、 $\eta_\lambda(\alpha_{\lambda^*} \otimes \alpha_\lambda) = 1$ だが、これは $\alpha_{\lambda^*}^* \alpha_\lambda = 1$ を意味する。したがって、淡中群の元のコンポーネントは可逆であり、 $\alpha_{\lambda^*} = \alpha_\lambda^{-1*}$ が成り立つ。

表現を $\lambda \simeq \sigma_1 \oplus \sigma_2 \dots$ と既約分解したとき、各成分への射影と埋め込みは表現の間の射である。 $\alpha_{\sigma_1 \oplus \sigma_2}$ について、 $\alpha_{\sigma_1}, \alpha_{\sigma_2}$ との間の自然性

$$\begin{array}{ccccc} V_{\sigma_1} & \longrightarrow & V_{\sigma_1} \oplus V_{\sigma_2} & \longrightarrow & V_{\sigma_2} \\ \alpha_{\sigma_1} \downarrow & & \alpha_{\sigma_1 \oplus \sigma_2} \downarrow & & \alpha_{\sigma_2} \downarrow \\ V_{\sigma_1} & \longrightarrow & V_{\sigma_1} \oplus V_{\sigma_2} & \longrightarrow & V_{\sigma_2} \end{array} \quad (11)$$

を考えると、 σ_1, σ_2 がユニタリ同値でなかった場合、 $\text{prj}_1 \alpha_{\sigma_1 \oplus \sigma_2} \text{inj}_2$ はゼロである。したがって、 $\alpha_{\sigma_1 \oplus \sigma_2}$ は、ユニタリ非同値な既約表現間の成分はゼロである。 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ とユニタリ同値であった場合、 $\sigma \rightarrow \sigma \oplus \sigma$ 型の表現の射は、複素数2つを使って $a \text{inj}_1 + b \text{inj}_2$ の形で書ける。このとき、自然性から

$$\alpha_{\sigma \oplus \sigma}(a \text{inj}_1 + b \text{inj}_2) = (a \text{inj}_1 + b \text{inj}_2) \alpha_\sigma \quad (12)$$

ここで、 $\text{prj}_{1,2}$ を左から作用すると、 a, b が任意であったことから、 $\alpha_{\sigma \oplus \sigma}$ の対角成分が α_σ で、非対角成分がゼロであることになる。この議論は任意個の直和でも同様であり、したがって、 $\alpha_{\lambda \oplus \sigma} = \alpha_\lambda \oplus \alpha_\sigma$ が成り立つ。□

Proposition 1.9. $\Pi : G \rightarrow T(G)$ を次で定義すると、これは連続群準同型である。

$$\Pi(g) = \{\pi_\lambda(g)\}_{\lambda \in \text{Rep}(G)} \quad (13)$$

Proof. 群準同型性は、各 π_λ が表現であることから、自然性は、 $\text{Rep}(G)$ の射が表現の射であることから、。連続性は $g \mapsto \pi_\lambda(g)$ が連続であることから従う。□

2 抽象フーリエ変換

ここでは、フーリエ変換のコンパクト群上の一般化である抽象フーリエ変換について記す。群上関数環の、表現の成分による展開が得られ、畳み込みが導入される。

$L^2(G)$ をコンパクト群 G の Haar 測度による L^2 空間とする。 $\text{Endnat}(U_G)$ を忘却 $U_G : \text{Rep}(G) \rightarrow \mathbf{FinHilb}$ の自己自然変換とする。 $\hat{G}$ を、 G の有限次元既約ユニタリ表現のユニタリ同値類とする。

Proposition 2.1. $\text{Endnat}(U_G) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} \text{End}(V_\sigma)$ ただし右辺は代数的な直積環とする。

Proof. 前節で淡中群の元のコンポーネントの $\oplus$ についての性質を示すときと同様の議論をする。任意の表現の射に対する自然性から、 $\text{Endnat}(U_G)$ の元の λ コンポーネントは、その既約分解成分のコンポーネントの直和に等しい。つまりここでも $\beta \in \text{Endnat}(U_G)$ について $\beta_{\lambda \oplus \sigma} = \beta_\lambda \oplus \beta_\sigma$ が成り立つ。したがって、 $\beta \in \text{Endnat}(U_G)$ は、その既約表現のコンポーネントだけで決定され、これを抽出する操作と直和で復元する操作が上記の同型を与える。以下この2つを同一視する。 $\square$

$\text{Endnat}(U_G)$ に次の内積と位相を入れて完備化したものを $L^2(\widehat{G})$ とする。

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \text{Tr}(\alpha_{\lambda}^{\dagger} \beta_{\lambda}) \dim(V_{\lambda}) \quad (14)$$

Definition 2.2.

$$\mathfrak{F}: L^2(G) \rightarrow L^2(\widehat{G}) \quad (15)$$

$$\mathfrak{F}(f)_\lambda = \int d\mu(g) f(g) \pi_\lambda(g) \quad (16)$$

とする。これを抽象フーリエ変換とよぶ。また

$$\mathfrak{F}^{-1} : L^2(\widehat{G}) \rightarrow L^2(G) \quad (17)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}(\alpha)(g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \text{Tr}(\pi^\dagger(g)\alpha_\lambda) \dim V_\lambda \quad (18)$$

を抽象逆フーリエ変換とよぶ。 現段階ではこれは構成を与えただけであり、これがこの通りの型をもつか (この定義はコドメインに収まるのか)、また互いに逆変換になっているか、ということは示されていない。これを以下で示していく。

Proposition 2.3. (*Schur 直交関係*) $\lambda, \sigma \in \widehat{G}$ とする。

$$\int d\mu(g) \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A circle with } \pi_\lambda(g) \text{ inside, with a line entering from the top and exiting from the bottom.} \\ \text{Diagram 2: A circle with } \pi_\sigma^\dagger(g) \text{ inside, with a line entering from the top and exiting from the bottom.} \end{array} \right) = \delta_{\lambda,\sigma} \quad \frac{1}{\dim V_\lambda} \quad (19)$$

Proof. この右辺は、適当な作用素によって部分トレースをとったとき、明らかに λ, σ 間の表現の射を与える。Schur 補題からそれはユニタリ同値なときのみ、ユニタリの定数倍であり他はゼロである。したがって、右辺は $\lambda = \sigma$ の時を除いてゼロである。 $\lambda = \sigma$ であるとき、 $X: V_\lambda \rightarrow V_\lambda$ を任意にとつて、トレースを取ると、

$$\int d\mu(g) \left(\begin{array}{c} \text{---} \pi_\lambda(g) \text{---} \\ \text{---} \pi_\lambda^\dagger(g) \text{---} \end{array} \right) X = \text{Tr} X \quad (20)$$

であるから、係数比較をすることによって題意である。 $\square$

Proposition 2.4. $\mathfrak{F}^{-1}$ は等長である。

Proof. $\alpha, \beta \in L^2(\widehat{G})$ とする。

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}\alpha, \mathfrak{F}^{-1}\beta \rangle \quad (21)$$

$$= \sum_{\lambda, \sigma \in \widehat{G}} \int d\mu(g) \text{Tr}(\alpha_\lambda^\dagger \pi_\lambda(g)) \text{Tr}(\pi_\sigma^\dagger(g) \beta_\sigma) \dim V_\lambda \dim V_\sigma \quad (22)$$

$$= \sum_{\lambda, \sigma \in \widehat{G}} \int d\mu(g) \left(\begin{array}{c} \alpha_\lambda^\dagger \\ \pi_\lambda(g) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \pi_\sigma^\dagger(g) \\ \beta_\sigma \end{array} \right) \dim V_\lambda \dim V_\sigma = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \left(\begin{array}{c} \alpha_\lambda^\dagger \\ \beta_\lambda \end{array} \right) \dim V_\lambda \quad (23)$$

$$= \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \text{Tr}(\alpha_\lambda^\dagger \beta_\lambda) \dim V_\lambda \quad (24)$$

$$= \langle \alpha, \beta \rangle \quad (25)$$

$\square$

Proposition 2.5. $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}^{-1} = \text{id}_{L^2(\widehat{G})}$

Proof.

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}^{-1}(\alpha)_\lambda \quad (26)$$

$$= \sum_{\sigma \in \hat{G}} \int d\mu(g) \quad \dim V_\sigma = \sum_{\sigma \in \hat{G}} \delta_{\lambda, \sigma} \quad (27)$$

$$= \alpha_\lambda \quad (28)$$

□

Fact 2.6. (Peter-Weyl 定理) $\mathfrak{F}^{-1}$ の像を $L^2(G)$ に入るだけ集めたものは、 $L^2(G)$ で稠密である。

Theorem 2.7. $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^{-1}$ は $L^2(G) \simeq L^2(\hat{G})$ のユニタリ変換である。

Proof. $\mathfrak{F}^{-1}$ が等長で、その像が稠密であることから全射である。つまり全単射等長であって、 $\mathfrak{F}^\dagger = \mathfrak{F}^{-1}$ 。 □

以下では畳み込みを考えるので、必ずしも $L^2(G), L^2(\hat{G})$ に入らない項が登場するが、入る場合のみに主張が成り立つと読む。

Definition 2.8. G 上可測関数の畳み込みを、

$$(f * k)(g) = \int d\mu(h) f(h) k(h^{-1}g) \quad (29)$$

とする。

λ, σ を既約表現とする。 $\lambda \otimes \sigma$ の既約表現分解のうち既約表現 ν 成分の射影をすべて足したものを $P_\nu^{\lambda, \sigma} : \lambda \otimes \sigma \rightarrow \nu$ とする。Endnat(U_G) の畳み込みを、

$$(\alpha * \beta)_\nu = \sum_{\lambda, \sigma} P_\nu^{\lambda, \sigma} (\alpha_\lambda \otimes \beta_\sigma) P_\nu^{\dagger \lambda, \sigma} \frac{\dim V_\nu}{\dim V_{\lambda \otimes \sigma}} \quad (30)$$

とする。

Proposition 2.9. 以下の抽象フーリエ逆変換が定義できる限りにおいて、

$$\mathfrak{F}^{-1}(\alpha * \beta) = \mathfrak{F}^{-1}(\alpha) \mathfrak{F}^{-1}(\beta) \quad (31)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}(\alpha\beta) = \mathfrak{F}^{-1}(\alpha) * \mathfrak{F}^{-1}(\beta) \quad (32)$$

Proof.

$$\mathfrak{F}^{-1}(\alpha) * \mathfrak{F}^{-1}(\beta)(g) \quad (33)$$

$$= \int d\mu(h) \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \text{Tr}(\pi_\lambda^\dagger(h) \alpha_\lambda) \sum_{\sigma \in \widehat{G}} \text{Tr}(\pi_\sigma^\dagger(h^{-1}g) \beta_\sigma) \dim V_\lambda \dim V_\sigma \quad (34)$$

$$= \int d\mu(h) \sum_{\lambda, \sigma \in \widehat{G}} \text{Tr}(\pi_\lambda^\dagger(h) \alpha_\lambda) \text{Tr}(\pi_\sigma^\dagger(h^{-1}) \beta_\sigma \pi_\sigma^\dagger(g)) \dim V_\lambda \dim V_\sigma \quad (35)$$

$$= \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \text{Tr}(\pi_\lambda^\dagger(g) \alpha_\lambda \beta_\lambda) \dim V_\lambda \quad (36)$$

$$= \mathfrak{F}^{-1}(\alpha\beta)(g) \quad (37)$$

および、

$$\mathfrak{F}^{-1}(\alpha) \mathfrak{F}^{-1}(\beta)(g) \quad (38)$$

$$= \sum_{\lambda, \sigma \in \widehat{G}} \text{Tr}(\pi_\lambda^\dagger(g) \alpha_\lambda) \text{Tr}(\pi_\sigma^\dagger(g) \beta_\sigma) \dim V_\lambda \dim V_\sigma \quad (39)$$

$$= \sum_{\lambda, \sigma \in \widehat{G}} \text{Tr}(\pi_{\lambda \otimes \sigma}^\dagger(g) \alpha_\lambda \otimes \beta_\sigma) \dim V_{\lambda \otimes \sigma} \quad (40)$$

$$= \sum_{\lambda, \sigma, \nu \in \widehat{G}} \text{Tr}(\pi_\nu^\dagger(g) (P_\nu^{\lambda, \sigma} (\alpha_\lambda \otimes \beta_\sigma) P_\nu^{\dagger \lambda, \sigma})) \dim V_{\lambda \otimes \sigma} \quad (41)$$

$$= \sum_{\nu \in \widehat{G}} \text{Tr}(\pi_\nu^\dagger(g) (\alpha * \beta)_\nu) \dim V_\nu \quad (42)$$

$$= \mathfrak{F}^{-1}(\alpha * \beta)(g) \quad (43)$$

より。 $\square$

3 再生定理

ここでは、 $G \simeq T(G)$ を示す。今これらはコンパクト位相群であって、この間の連続準同型 $\Pi : G \rightarrow T(G)$ が得られている。

Proposition 3.1. Π は単射である。

Proof. Peter-Weyl 定理から $\pi_\lambda(g)$ の行列成分は $L^2(G)$ で稠密である。とくに $e \neq g$ を区別できるので、ある表現があって、 $\pi_\lambda(g) \neq \text{id}_{V_\lambda}$ 。すなわち、 $e \neq g$ な g に対して、 $\Pi(g)$ のコンポーネント $\pi_\lambda(g)$ があってこれは id_{V_λ} ではない。したがって、 Π は単射である。 $\square$

コンパクトハウスドルフ空間の連続写像は、自動的に開・閉写像である。したがって、全射性が言えれば逆写像も連続になる。像の補集合は開集合であるが、これが空でないとすれば、 $T(G)$ の Haar 測度はゼロでない値をもち、引き戻し $\Pi^* : L^1(T(G)) \rightarrow L^1(G)$ は非ゼロの要素をゼロに写像しうる。しかし、以下のようにはそれはありえないことが示せる。

Definition 3.2. 関手 $\mathcal{E} : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Rep}(T(G))$ を

$$\mathcal{E} : (\pi_\lambda, V_\lambda) \mapsto ((\alpha \in T(G) \mapsto \alpha_\lambda), V_\lambda) \quad (44)$$

$$f \mapsto f \quad (45)$$

で定義する。

Proposition 3.3. Π による表現の引き戻し関手を $\text{Rep}(\Pi) : \text{Rep}(T(G)) \rightarrow \text{Rep}(G)$ とする。このとき $\text{Rep}(\Pi)\mathcal{E} = \text{id}_{\text{Rep}(G)}$ とくに、 $\text{Rep}(\Pi)$ は全射な関手であり、 $\mathcal{E}$ は単射な関手である。

Proof. 射関数はともに恒等的なので、対象関数だけみればよい。

$$\pi_\lambda \tag{46}$$

$$\mapsto (\alpha \in T(G) \mapsto \alpha_\lambda) \tag{47}$$

$$\mapsto (\alpha \in T(G) \mapsto \alpha_\lambda)\Pi \tag{48}$$

$$= (g \in G \mapsto \{\pi_\lambda(g)\}_\lambda \mapsto \pi_\lambda(g)) \tag{49}$$

$$= \pi_\lambda \tag{50}$$

□

Proposition 3.4. $\text{Rep}(\Pi), \mathcal{E}$ は、 $\otimes, \oplus, \dagger, (-)^*$ を保つ。

Proof. $\otimes, \oplus$ については明らか。 $\dagger, (-)^*$ は淡中群の構成時の条件と、 $\mathcal{E}$ の定義から従う。

□

Proposition 3.5. $\text{Rep}(\Pi)(\sigma), \mathcal{E}(\lambda)$ が既約であれば、 σ, λ は既約である。

Proof. $\oplus$ を保つことから。

□

Proposition 3.6. $\mathcal{E}$ は既約性を保つ。とくに $\mathcal{E}$ の像は $\text{Rep}(T(G))$ の忠実充満部分圏（射に関して全単射）である。

Proof. λ が既約表現であり、 $\mathcal{E}(\lambda)$ が既約表現でないとき、 $\text{Rep}(\Pi)$ が $\oplus$ を保つことから $\text{Rep}(\Pi)\mathcal{E}(\lambda) = \lambda$ も既約表現でなくなり、矛盾である。

既約性を保つことから、 $\mathcal{E}$ は既約分解を保つ。Schur 補題から、表現の間の射は、その既約分解のユニタリ同値な成分で決定されるため、 $\mathcal{E}$ は両者の圏の Hom を保つ。

□

Proposition 3.7. $\text{Rep}(G), \text{Rep}(T(G))$ は以上の関手によって圏同値である。

Proof. $\mathcal{E}$ の像が $T(G)$ のすべての既約表現を含めば、半単純性から $\mathcal{E}$ は本質的に全射となり、題意である。忘却関手 $U_{T(G)} : \text{Rep}(T(G)) \rightarrow \mathbf{FinHilb}$ の $\text{Im}\mathcal{E}$ への制限を考え、これの自己自然変換 $\text{Endnat}(U_{T(G)|\text{Im}\mathcal{E}})$ を考える。これを前節と同様の内積で完備化したものを $L^2(\widehat{T(G)}_{|\text{Im}\mathcal{E}})$ とすると、これは $L^2(\widehat{T(G)})$ の閉部分空間を成す。

今、任意の $\alpha \neq \text{id}_{U_{T(G)}} \in T(G)$ に対して、明らかにある $\lambda \in \text{Rep}(G)$ があって、 $\alpha_\lambda \neq \text{id}_{V_\lambda}$ である。すなわち、 $\mathcal{E}(\lambda)$ の行列要素は $C(T(G))$ を分離する。よって、Stone-Weierstrass 定理が適用であり、 $\mathcal{E}$ の像として得られる表現を抽象逆フーリエ変換したものは、 $C(T(G))$ で稠密である。これを L^2 ノルムで完備化し直すことによって、 $\mathfrak{F}^{-1}(L^2(\widehat{T(G)}_{|\text{Im}\mathcal{E}})) = L^2(T(G))$ となる。

もし、 $\mathcal{E}$ の像に含まれないような $T(G)$ の既約表現 σ があったとする。 $\text{End}(V_\sigma)$ の元を $T(G)$ 上の抽象逆フーリエ変換で $L^2(T(G))$ に移したものは、フーリエ変換が内積を保つことと、Schur 直交関係から、 $L^2(T(G))$ の直交補空間になる。しかしこのようなものはありえない。よって、 $\mathcal{E}$ は、 $T(G)$ のすべての既約表現を像に持つ。

□

Proposition 3.8. $\widehat{G} \simeq \widehat{T(G)}$ かつ、各々の既約表現同値類の代表を同一の Hilbert 空間に取れる。

Proof. これまでの議論から、 $\mathcal{E}$ が既約表現の一対一対応を実現する。 $\mathcal{E}$ はユニタリな表現の射もユニタリな表現の射に移すので、ユニタリ同値性も壊さない。また元から $\mathcal{E}$ は同じ表現空間を使いまわしている。 $\square$

Proposition 3.9. $L^2(G) \simeq L^2(\widehat{G}) \simeq L^2(\widehat{T(G)}) \simeq L^2(T(G))$

Proof. $\text{Endnat}(U_G) \simeq \oplus_{\lambda \in \widehat{G}} \text{End}(V_\lambda)$, $\text{Endnat}(U_{T(G)}) \simeq \oplus_{\lambda \in \widehat{T(G)}} \text{End}(V_\lambda)$ および $\widehat{G} \simeq \widehat{T(G)}$ によって行列直積環を対応させ、これを完備化することによって得られる。 $\square$

Proposition 3.10. $f \in L^1(T(G)) \cap L^2(T(G))$ について、 $\int_G d\mu(g) f \Pi(g) = \int_{T(G)} d\mu'(\alpha) f(\alpha)$ ただし、 μ' は淡中群の *Haar* 測度とする。

Proof. $f \in L^1(T(G)) \cap L^2(T(G))$ を $G, T(G)$ 両方で抽象フーリエ変換で展開する。

$$f(\alpha) = \sum_{\lambda \in \widehat{T(G)}} \text{Tr}(\alpha_\lambda^\dagger \mathfrak{F}_{T(G)}(f)_\lambda) \quad (51)$$

$$f \Pi(g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \text{Tr}(\pi_\lambda^\dagger(g) \mathfrak{F}_G(f \Pi)_\lambda) \quad (52)$$

$$= \sum_{\lambda \in \widehat{T(G)}} \text{Tr}(\pi_\lambda^\dagger(g) \mathfrak{F}_{T(G)}(f)_\lambda) \quad (53)$$

つまり、両者の抽象フーリエ展開係数は $F_\lambda = \mathfrak{F}_{T(G)}(f)_\lambda = \mathfrak{F}_G(f \Pi)_\lambda$ と同一のものとして良い。

これを $G, T(G)$ 上で積分すると

$$\int_G d\mu(g) f \Pi(g) = \int d\mu(g) \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \text{Tr}(F_\lambda \pi_\lambda(g)) \quad (54)$$

$$\int_{T(G)} d\mu'(\alpha) f \Pi(g) = \int d\mu'(\alpha) \sum_{\lambda \in \widehat{T(G)}} \text{Tr}(F_\lambda \alpha_\lambda(g)) \quad (55)$$

このトレース積分に、自明表現のトレース項 $1 = \text{Tr}(1\pi_1(g))$ を掛けても変化しない。この項があるものとみなすと、Schur 直交関係から $\lambda = 1$ 以外の項が消える。

$$\int_G d\mu(g) f \Pi(g) = \int d\mu(g) F_1 \quad (56)$$

$$\int_{T(G)} d\mu'(\alpha) f \Pi(g) = \int d\mu'(\alpha) F_1 \quad (57)$$

よって、題意である。 $\square$

Theorem 3.11. $G \simeq T(G)$ 。つまり、表現の圏の構造から群が再生できる。

Proof. Π の全射性を示す。もし全射でなければ、その像の補集合は開集合であり、ゼロでない *Haar* 測度の値を持つ。この像補集合を A として、その特性関数 1_A を考えると、これは明らかに $1_A \in L^1(T(G)) \cap L^2(T(G))$ であって、 $\Pi^*(1_A) = 0$ 、とくに $\int d\mu(g) 1_A \Pi(g) = 0$ である。しかし前命題から $0 < \int d\mu'(\alpha) 1_A(\alpha) = \int d\mu(g) 1_A \Pi(g)$ であるべきなので矛盾である。したがって、 Π は全単射であり、コンパクトハウスドルフ性から、その逆も全単射、 $G \simeq T(G)$ である。 $\square$

参考文献

- [1] A.joyal,R.Street: An Introduction to Tannaka duality and Quantum Groups(1990)