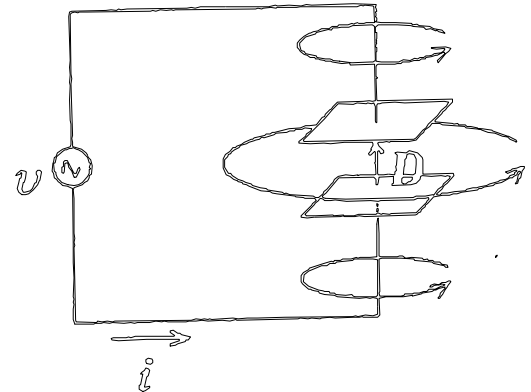


電磁波

作成中

3-1 電磁波の発生

電磁波というのも面白いもので、一体何故で導線も何にもないのに伝搬することができるのでしょうか。第一電波は目に見えるものじゃない。目に見えないそんなものを発見できる人も本当に凄いですねえ(目に見えなくても発見というんですねえ)。さて、そんな目に見えないものを説明するのは少々難しいのですが、よくよく考えてみれば、電界やら電流だって目に見えないものなのですから同じことでしょうか。結論として電磁気は難しい? いえいえ、何の為に紙と鉛筆があるのですか。目に見えなきゃイメージとして図に書いてしまえばいいのです。なにも無いところからの発見は大変ですが、発見されて、理論ができているものは図を通してわかりやすく説明することが可能です。理解できるかできないかは、努力と予備知識の量とその生かし方です。皆様はすでに予備知識をつけておりますので(読みとばしてなければ)説明する方もその筋の専門用語をびしびしに使えますので大変楽になります(でも専門用語に頼って手抜きをすることはいたしません。念の為)。では電磁波というものはどんなものか、そこから簡単に説明をしていきます。まず図3-1を見てください。コンデンサに交流電源を加えてみた図です。このとき導線には交流電流が流れますが、コンデンサの極板の間は一体どうなっているのでしょうか。極板の間は絶縁されているはずですから導線と同じようにこの極板の間に電流が流れているとは思えません。まず図3-1の回路でコンデンサにどういう電流が流れているかを一言で言いますと、コンデンサには充放電電流が流れているということです。すなわちコンデンサに交流電流を加えると、コンデンサの極板には絶えず電荷 Q の充放電が繰り返されているわけです。電荷 Q の大きさが変化するわけですから、極板の間の電界もそれに応じて変化しております。さて、極板の間に電流は流れませんが、電束は発生します。注目すべきは導線の周りでアンペアの法則により磁界は発生しますが、コンデンサの極板の間でも磁界が発生するということです。つまり磁界から見て、電界が変化するという事は、電流が変化するという事と同じということなのです。そして、このように電界変化を電流に見立てたものが変位電流というわけです。よくコンデンサは変位電流が流れるといいますが、これは極板の電界が変化



コンデンサの電極の間には変位電流が流れます。この変位電流でも磁界は発生するのです。

図3-1 変位電流でも磁界は発生する

し、それを電流に見立てているということです。さて、このように電界が変化することにより磁界が発生するということが言えました。これがマックスウェルが電波の存在を予測した考えの原点なのです。次に変位電流から電磁波への発展を見てみましょう。まず極板に変位電流が流れたとします。するとアンペア右ネジの法則により磁界が発生します。ここで変位電流は大きさが変化していますから、それにより発生する磁界の大きさも変化しております。つまりここでファラデーの電磁誘導の法則がでてくるのです。磁界が変化する、その変化を押さえる方向に起電力が発生します。すなわちその磁界変化を押さえる方向に電界が変化するので、そしてその電界が変化するので磁界が発生し・・・と電界と磁界が鎖のようにつながりあって次々と発生してい

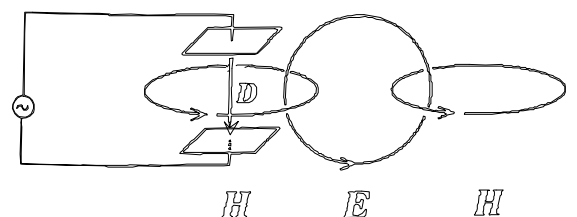


図3-2 電磁波の発生

きます。これが電波が空間を伝わっていく原理と考えてよいでしょう。

3-2 マックスウェルの電磁方程式

変位電流がその周りに磁界を作ること、そして変位磁界がその周りに電界を作ることがわかってきました。それではその現象を今までの電磁気の知識から式で表すとどうなるのでしょうか。まず変位電流(変位電界)がその周りに磁界を作るといことは

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J})$$

で表すことができます。どっかで見たことがある式でしょう。以前にやったのは $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}$ というものでした。今回は \mathbf{D} / t なるものがさらに加わっております。といいますのも、 $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}$ のときは、変位電流を考えに入れていませんでしたし、すでに " 変位電流によってもアンペア周回積分の法則は成り立つ " というのを御存じになられたかと思しますので、式3-1のような一般形がかけるわけです。ちなみに $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}$ はごく限られた範囲でのみ適用できるものと考えていいでしょう。この式が、電流、そして変位電流によりその周りに磁界ができるということです。それでは次に変位磁界の周りに電界ができるということを式で表してみますと、

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t})$$

となります。負号は磁界を押さえる方向に電界が発生することを意味します。さて、この式(3-1)、式(3-2)がかの有名なマックスウェルの電磁方程式なのです。マックスウェルの電磁方程式は上記二つと、あと補足的な式が二つあり、まとめると

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}) \quad (3-1)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}) \quad (3-2)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (3-3)$$

$$\text{div}\mathbf{E} = \rho \quad (3-4)$$

新たに出した補足的に式は以前にすでにやったやつで、特に式の意味を説明する必要はないでしょう。興味があるのはこの四つの式から一体どういったことが言えるのかということではないでしょうか。実は、これら式から電磁波という波を表す波動方程式というものが導かれるのです。波動方程式、なにやら難しそうな響きを持った言葉ですが、まずは電磁波の波動方程式とやらを出してみましょう(取りあえず波動方程式の意味は深く考えずに、波を式で表したものとでも思ってください)。

いま、式(3-1)と式(3-2)を何とかくっつけてひとつの式にしてしまおうと考えます。そこでこのような操作をしてみます。

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = \text{rot}\left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\mathbf{H}$$

となつて式3-1が代入できる形になります。早速代入すると、

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\right) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}$$

という式がでてきました。いま式(3-2)を変形して式(3-1)を代入しましたが、これと逆なことを全く同様な方法で行えばもうひとつ式がでてきます。結局式(3-1)と式(3-2)から以下の二つの式が得られます。

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} \quad (3-5)$$

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{H}) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} - \text{rot}\mathbf{J} \quad (3-6)$$

ここで式(3-3)を電界Eに対するベクトル波動方程式、式3-4を磁界Hに対するベクトル波動方程式といいます。大変複雑な式ではありますがさらに変形してみます。式(3-3)において自由空間を伝わる波を考えます。自由空間でなにも無い領域ですから、 $\mathbf{J} = 0$ (この領域は絶縁物であつて導電率 $= 0$ 、また μ は一様であるとして)で、

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} \quad (3-7)$$

ここでベクトルの公式(あくまで公式、どうしてこんな式が成り立つのかは、数学の本を参照してください)

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{E}) - \text{div}(\text{div}\mathbf{E}) \quad (3-8)$$

をつかってみますと

$$\text{grad}(\text{div}\mathbf{E}) - \text{div}(\text{div}\mathbf{E}) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} \quad (3-9)$$

なにも無い領域ですから、 $\text{div}\mathbf{E}$ は 0 です(電荷を含まない空間において発散はない)。よつて

$$\text{div}(\text{div}\mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} \quad (3-10)$$

という式がでてきました($\text{div}(\text{div}\mathbf{E}) = \Delta \mathbf{E}$: ラプラシアン 覚えてますか)。この式もまた重要なのです。波動方程式をやつた人ならどっかで見たような・・・と思うでしょう。一般に

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = A \times \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad A: \text{定数} \quad (3-11)$$

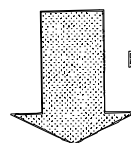
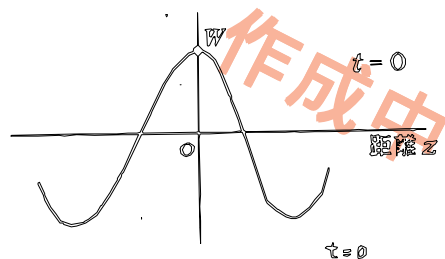
という形で表される式を波動方程式といいます。こんな微分だらけの式(2階微分方程式といいます)のどこが波を表すか疑問に思うかもしれません。ようはこの微分方程式を満たす式(つまりは解です。一般解とか特別解とか・・・微分方程式をやつたでしょう)が \cos とか \sin を含んで、いかにも波だなあという式なのです。二階微分方程式の解が想像つく人はこの式で " お～波だ！ " と思うかもしれません。つ

いからです上式が確かに波が伝搬するんだということを説明してしまいます。この微分方程式を満足する解として

$$W = A_1 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (3-12)$$

$$W = A_2 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (3-13)$$

という式があります。この二式は波動方程式の特別解です。この特別解が本当に波が伝搬する様を表しているのでしょうか？例えば $t=0$ の時とある程度時間が立ったときどうなっているかを見てみれば、伝搬しているかどうか確かめることができます。この式の各定数の意味をいっておきますと、 W は変位、 r は進む距離、 c は r 方向へ伝わる速度です。いま $t=0$ の時、 $r=0$ という位置に W という値があるとします。そして時間 r/c がたてばこの W は位置 r まで移動していることがわかるでしょうか。話がそれてきましたがとにかく式(3-10)は波動方程式であることが大事なのです。それでは波動方程式を応用して見ることに致しましょう。



時間がたつと.....

点Wが移動している！

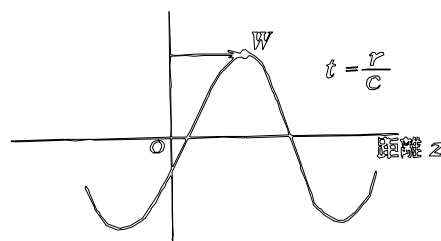


図3-3 波の進行

3-3 電磁波という波

電磁波は、電界と磁界の相互作用で発生すること、そしてそれを式で表したら波動方程式という波を表す式が出てきました。ということは、どうやら図3-2の鎖は波として表されるようです。電磁波が空間を伝搬しているとき、ある時間における電界や磁界の強さを見てみると、電磁波が確かに波であることが確認できます。

電界の強さをベクトルを使って表すと、図3-aのような電磁波という波が見えてきます。このように電磁波を電界のベクトルによって表した図を進行波パターンといいます。とりあえず、電磁波として図3-aのような例をあげましたが、実際にはこのような波の他にもいくつか種類があります。ですが、電磁波というものはいったいどの辺が波なのかがわかればと思います。

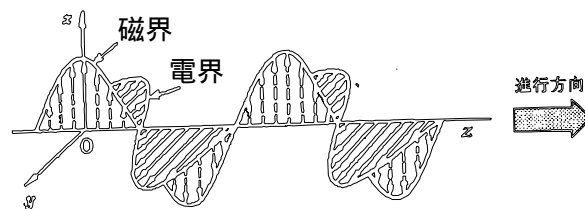


図3-4 電磁波という波

3-4 平面電磁波

電磁波にもいくつか種類があります。ここでは、そのうち最も基本といえる平面電磁波というものについて述べていきます。

3-4-1 波動方程式の導き

ここで平面電磁波というものを魚として固有インピーダンスとか伝搬速度なんかをだしてゆきたいと思います。まず平面電磁波というものはどんなものかを書いておきましょう。直角座標系で、電磁波が z 方向に進行しているとすれば進行方向と垂直な方

向には成分変化が無いということです。すなわち電界だけを見るなら図3-5のように

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{E} = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{E} = 0 \quad (3-14)$$

ということです。この波は波源より十分遠方の位置で観測される波です。十分遠方ですから $\nabla = 0$ ですし、空間の ϵ と μ は一様だとしますとマックスウェルの電磁方程式は

$$\text{rot} \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3-15)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3-16)$$

となります。ここで実際にこの式の左辺を求めてみましょう。rotEの出し方を復習してみてください。

$$\text{rot}\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (3-17)$$

ここで平面波ですから $x=$ / $y=0$ となりますので、

$$\text{rot}\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} E_x - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z} E_y \quad (3-18)$$

同様に

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} H_x - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z} H_y \quad (3-19)$$

となります。さて、電界の x 成分は磁界の y 成分に関係があり電界の y 成分は磁界の x 成分に関係があります(電界が磁界を、磁界が電界を作っており、そして互いに直交しているということです。図3-4を見返してみましょう)。得られた結果から z 方向の電界・磁界はなく(図3-5)、方程式としては独立な (E_x, H_y) と (E_y, H_x) の二組となります。それではこの二組の波動方程式を導いてみましょう。まず $\text{rot}\mathbf{H}$ 、 $\text{rot}\mathbf{E}$ の結果から

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z} E_y + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} E_x = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3-20)$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z} H_y + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} H_x = -\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3-21)$$

添え字にとらわれないで。i が x 成分 j が y 成分です。

x 成分 y 成分

ここで H や E を x、y 成分に分けて H_x 、 H_y と E_x 、 E_y で示します。式(3-20)で x 成分は i 項ですから、

$$-\frac{\partial}{\partial z} E_y = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_x \quad (3-22)$$

そして y 成分は j 項ですから

$$-\frac{\partial}{\partial z} E_x = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y \quad (3-23)$$

という式がでてきます。さて、同様に式(3-21)について x、y 成分で式を分けると

$$-\frac{\partial}{\partial z} H_y = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x \quad (3-24)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} H_x = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E_y \quad (3-25)$$

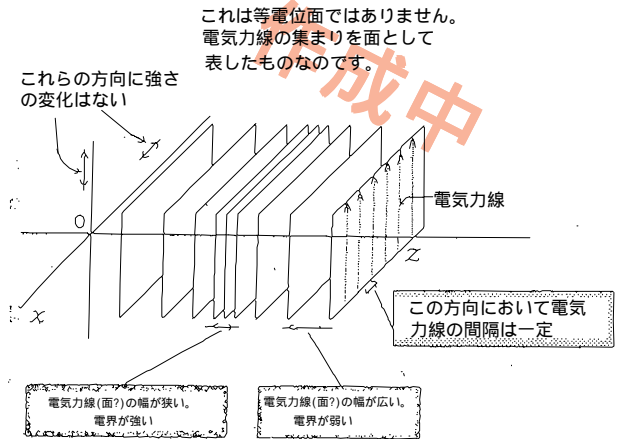


図3-5 平面電磁波

という式が得られ、結局電界と磁界の関係式は計四つ得られました。この四つの式から波動方程式を二つ導くことができます。マックスウェルの式から波動方程式を導いた手順を思い出してみてください。

まず式(3-23)を z で微分して、それを式(3-24)へ代入いたします。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} H_y \left(\mu \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} H_y = \frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x}{\mu \frac{\partial}{\partial t}}$$

(3-24)より

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x = \frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x}{\mu \frac{\partial}{\partial t}}$$

式(3-24)へ代入

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x}{\mu \frac{\partial}{\partial t}} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x \quad (3-26)$$

こうして波動方程式が得られました。この式を一般式としてベクトルを用いて表せば

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} \quad (3-27)$$

という式になります。式(3-26)で、両辺とも E は E_x となっていますので式(3-27)のようにできるのです。

つまり今回の例では波の進む方向として z 方向をとった結果式(3-26)のような電界の x 方向成分がでてきたわけで、もし波の進む方向を y 方向とか x 方向としたときに式(3-26)の E_x が E_y とか E_z になったりするのは、そしてそれをまとめて表してしまったのが式(3-27)ということです。さて、磁界についても全く同様に波動方程式を導くことができ結果を言うと、

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} \quad (3-28)$$

という式が得られます。こうしてマックスウェルの電磁方程式から平面波という条件で波動方程式を導きました。波動方程式が導けたということは、この式の解を求めることにより磁界や電界がどのように振舞うか式で表現することができます。しかし式(3-27)や式(3-28)の微分方程式を見て、この解を求めようと考えただけでうんざりしそうです。しかし世の中には大変便利な方法がありましてそれらを活用しない手はありません。そこで、その方法とやらを使うにあたりその考え方を説明してゆきます。

3-4-2 波動関数と複素指数関数

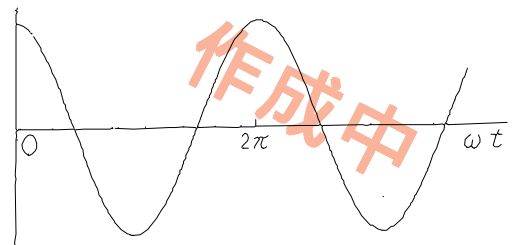
$f(z - vt)$ という形を持った任意の関数(ここで、 v は伝搬速度、 t は時間、 z は波の進む方向)は、波動方程式を満たします。突然こんなことを言うとき「へ？」と言葉を失うかもしれません。まずはこういう関数は波の伝搬を表すんだということを理解していただきたいと思います。そして、当たり前かもしれませんが $f(z - vt)$ を波動方程式に示されるように微分したりして変形していくと確かに波動方程式を満たしているということです。

さて、伝搬する信号が交流現象であるなら波動関数は三角関数で表されます。その一例を上げれば、

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (3-29)$$

この式により z 方向に波が伝搬することを表すことができます。cos の中に kz が入っているのがみそです。k という定数がでてまいりましたが、これについてはこの伝搬式を順を追って説明していくときに一緒に説明してしまいます。それではまずこの式が波を伝搬するということを表しているんだということを説明していきましょう。

まず式(3-29)の t 、これは時間に応じて角度が $0 \sim 2\pi$ までぐるぐる回っていることです。すでに承知かと思われませんが、 $\omega = 2\pi f$ で、 ω を角速度といいます。そもそも何故この式がでてきたかという、正弦波関数は 2π の周期を持っているので、 $\cos \omega t$ の t が一周期の時間 T となったとき ($t=T$)、この \cos の値が 1 にならなければなりません。このことから $T = 2\pi / \omega$ という条件式ができて、 $f = 1/T$ から $\omega = 2\pi f$ が得られるのです。が何故角速度かといわれるかということ、例えば図 3-6 の波の一周期、つ



ω が大きい(周波数が高い)ということ
短時間で $0 \sim 2\pi$ の一周期を回るとい
うことです。

図 3-6 t を横軸で表した波

まり $0 \sim 2\pi$ という角度を 1 秒間に何回繰り返すかということ、 f が高ければ $0 \sim 2\pi$ という繰り返しを一秒のうちに変早くくるくると回ることになります。さて、

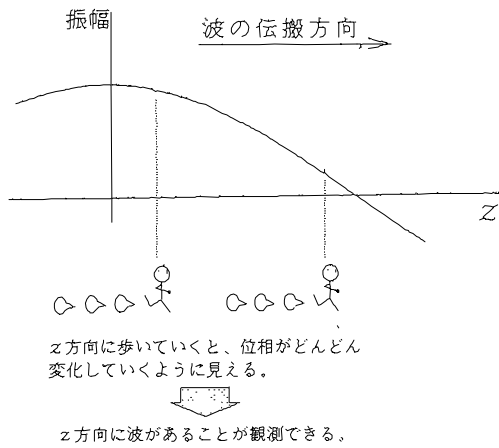
ω は角速度ですから、角度にするには時間をかければよいことになります(ω の単位は rad/sec、したがって rad/sec \times sec=rad)。これが ωt です。結局、

ωt の部分は時間が判れば角度が出てくるということになります。次にこの式(3-29)では、 k という何かよくわからない定数と、波の進む方向の距離である z という値が出ております。この k はとにかく定数ですのでなんか適当な値が入るということは確かです。ところで、cos の中身は角度でなければいけません。 z は距離ですから、どうやら k はその z の距離を角度に直すものということが伺えます。 ωt の場合は時間が進むと角度が変わっていくように、 kz の場合は距離 z が変わると角度が変わっていくということになります。ここで電気の世界で、

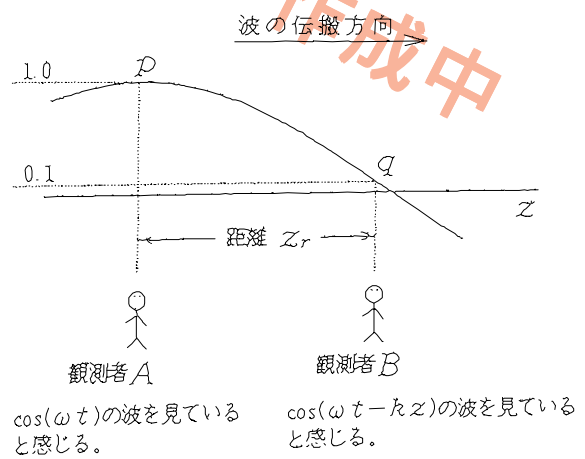
$$E = E_0 \cos(\omega t - \phi) \quad (3-30)$$

と表される式において、 ϕ は E の位相を表すことをご存じでしょうか。cos($\omega t - \phi$) は cos(ωt) より位相が ϕ だけ遅れていることを示しているのです。このことから式(3-29)は、 z が大きくなる(距離がどんどん離れていく)と位相がどんどん遅れていくことがわかるでしょうか。結局 k というのはその距離を位相に対応させるもので、位相定数と呼ばれているものなのです。それではこの距離が離れていくと位相が遅れるということを表す式が何故、波を伝搬する式であるのかを考えていきましょう。

まず、図 3-9 のように距離 z 離れた位置にそれぞれ波の観測者 A と B がいたとします。いま、時刻 $t=t_A$ の時、A が図 3-9 における波の p(振幅が 1.0)点を見たとき、B は、まだ A 者がちょっと前を見た q(振幅が 0.1)点を見えています。といいますのも、B が見る波というのは、 $\cos(\omega t - kz)$ であって、A 者の見る波である $\cos(\omega t)$ よりも位相が kz 遅れますから、実際に A 者の見たところを B が見るのはある程度時間が経過してからです(A 者に対し B



(a) 時間を止めて、距離に対する振幅分布を見る



(b) 観測者の位置を固定して波の伝搬を見る

図3-7 波の伝搬

者は \cos の括弧の中が kz 引かれてしまってます。したがって A 者と \cos の括弧の中が同じ値になるには、 $k \cdot z \cdot t$ は値が決まっているので t が大きくなるしかありません。結局 B 者が A 者と同じ点を見えた時間を t_B とすると (すなわち B 者が見ている波の振幅が 1.0 となるには、 t はどうなればいいのか。A 者は $t=t_A$ のときにこれを見ています)

$$\cos(\omega t_A) = \cos(\omega t_B - kz_r) \quad (3-31)$$

A が時刻 t_A に見た点 P (振幅 1.0) B は t_B の時刻でその振幅 1.0 の点 P が見れる

より

$$\omega t_A = \omega t_B - kz_r$$

$$t_B = \frac{\omega t_A + kz_r}{\omega} = t_A + \frac{kz_r}{\omega} \quad (3-32)$$

B 者は A 者より kz_r / ω だけ時間がたつと点 P が見れる

となり、 t_A より kz_r / ω の時間が経つと B 者が点 P を見ることができます。すなわち、P 点は kz_r / ω という時間をかけて B まで進んだことになります。これが波の伝搬を表すことなのです。 z_r という距離を kz_r / ω という時間をかけて進んだのですから、この波の伝搬速度は、

$$v = \frac{z_r}{kz_r / \omega} = \frac{\omega}{k} \quad (3-33)$$

となります。

ここでこの式を位相定数の式に直せば、

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (3-34)$$

となり、位相定数は角周波数を波の伝搬速度で割ったものとなります。波の速度を光速とするなら

<http://www.asahi-net.or.jp/~bz9s-wtb/index.htm>

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{c} \frac{c}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3-35)$$

となり、2 の中に 1 波長が何個はいるかということで k を波数とも呼びます。

ところでこれら結果から式(3-29)を変形してみますと、

$$\begin{aligned} \text{式(3-29)} &= E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z\right) = E_0 \cos\left(-\frac{\omega}{v}(vt - z)\right) \\ &= E_0 \cos\left(\frac{\omega}{v}(z - vt)\right) \end{aligned} \quad (3-36)$$

となり確かに波動関数となっております。一般的には波は進む波ばかりではなく反射などにより帰ってくる波もあります。それを考えに入ると

$$E = F(z - vt) + F(z + vt) \quad (3-37)$$

+z 方向に進む波 -z 方向に進む波

となります。次に三角関数の複素指数関数への代用について述べます。

まずオイラーの公式を思い出してください。

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (3-38)$$

複素指数関数は三角関数にて作られております。このことを利用して先の余弦関数を複素指数関数に置き換えてしまいます。いとも簡単に置き換えて大丈夫なもんか? と思うと思いますが、これが大丈夫なのです。ものは試し、式(3-29)を複素指数関数で表してみましょう。

$$\mathbf{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} = E_0 e^{-jkz} e^{j\omega t} \quad (3-39)$$

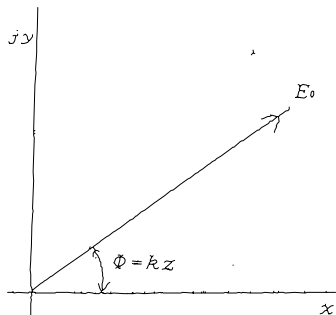


図 3-10 $e^{j\omega t}$ のベクトル

ここで、 $E_0 e^{-jkz}$ が交流理論で使われるところの複素振幅です。つまり

$$E_0 e^{-jkz} = E_0 (\cos kz - j \sin kz) = x + jy \quad (3-40)$$

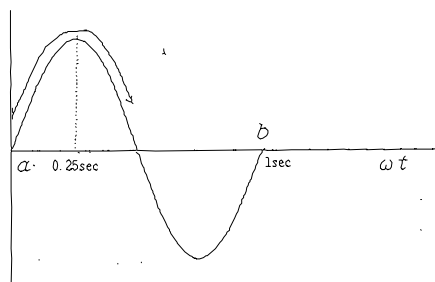
と、大きさが E_0 で x 軸とのなす角 kz が位相差という複素平面上の二次元ベクトル上で表示できるのです。交流をベクトル表示というのはちょっと慣れないかもしれませんが、交流理論ではこのような取り扱い方をします。例えば

$$E_0 \cos(\omega t - \phi_1) \quad (3-41)$$

$$E_0 \cos(\omega t - \phi_2) \quad (3-42)$$

はベクトル表示すると図 3-9 のようになり式 (3-41) と式 (3-42) の位相差がベクトルのようになるようになります。あと $e^{j\omega t}$ という項が残っておりますが、これは図 3-8 で表したベクトルが時間とともに反時計方向にぐるぐる回ることを表します。つまり、図 3-10 (a) のように、時間軸を x 軸にとっていたとき z 点から b 点へ時間が進むことは同図 (b) の a 点から b 点まで (この図で a 点と b 点は同じ位置になります) をぐるっと一回転することなのです。では具体的な数値例として、 $f=1$ [Hz] で 0.25 秒経過した点は、

$$e^{j\omega t} = e^{j(2\pi \times 1 \times 0.25)} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$$



(a) 時間と振幅で表現した場合

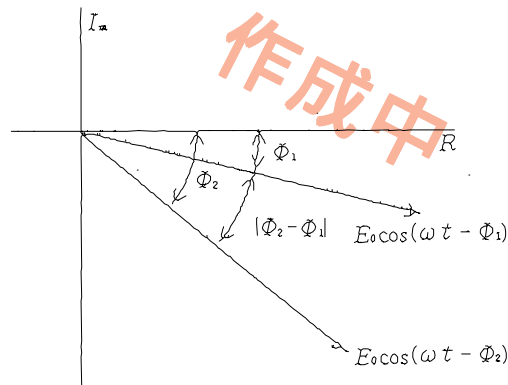


図 3-10 (3-31), (3-42) 式をベクトルで表すと

と $1/4$ 回転したところとなります。さて、何故こんなまわりくどいようなことをするかというと、この方法を用いると計算の手順や表現を簡略化することができるからなのです。特に波動方程式のように微分がさんざんはいつてくると計算が大変面倒なのですが、この方法、つまり $e^{j\omega t}$ の形を使うと時間微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t} \quad (3-43)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{j\omega t} = -\omega^2 e^{j\omega t} \quad (3-44)$$

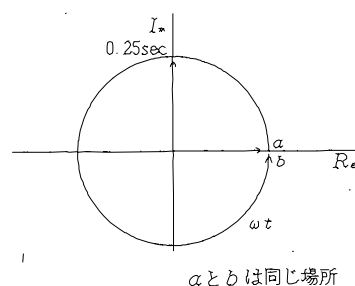
$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{j\omega t} = (j\omega)^n e^{j\omega t} \quad (3-45)$$

こうして表された波は進行波のみです。波動関数のところでお話ししましたように、波には反射波というものも考えられますから、これを考慮いたしますと、

$$E = (E_{0a} e^{-jkz} + E_{0b} e^{+jkz}) e^{j\omega t} \quad (3-47)$$

進行波 反射波 時間項
というように表されます。

さて、これで複素指数関数による表現と波動関数についての説明が終わりました。いよいよマックスウェルから導いた平面波の波動方程式の解をこれら



a と b は同じ場所

(b) 大きさと角度で表した場合

図 3-10

を用いて解くことに致しましょう。

3-5 平面電磁波の波動方程式の解

今一度平面波の波動方程式を載せます。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3-48)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (3-49)$$

ここでEもHも時間に関する量であることはすでに述べましたので、 ω を使って表すと、 $\omega = 2\pi / T$ から、両式は

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + k_0^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3-50)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + k_0^2 \mathbf{H} = 0 \quad (3-51)$$

と変形できます。ここで $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ですから式(3-50)、式(3-51)は単振動の解となります。すなわち、式(3-50)、式(3-51)の解は

$$\mathbf{E} = E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (3-52)$$

$$\mathbf{H} = H_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (3-53)$$

となります。ここでE₀やH₀は時間に依存しない値です。さて、式(3-50)、式(3-51)から式(3-52)、式(3-53)のような解となることは指数関数のところでお話ししましたが、このままでは何とも面白くありません。E₀、H₀は実際、どういう値になるのでしょうか。その求め方は、式(3-52)、式(3-53)を実際にマクスウェルの式に入れてやればいいのです。3、4式はベクトル表示されていますので、このまま代入するとごっちゃになりますからまずx、y、zの各成分に分けます。

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} e^{j(\omega t - k_0 z)} & H_x &= H_{x0} e^{j(\omega t - k_0 z)} \\ E_y &= E_{y0} e^{j(\omega t - k_0 z)} & H_y &= H_{y0} e^{j(\omega t - k_0 z)} \end{aligned} \quad (3-54)$$

$$E_z = E_{z0} e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad H_z = H_{z0} e^{j(\omega t - k_0 z)}$$

そして、マクスウェルの式に代入します。全成分についてやるやるのは大変ですので、ひとつに絞るとしましょう。

$$(\text{rot} \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (3-55)$$

ここで平面電磁波は $E_z = 0$ ですから

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (3-56)$$

式(3-54)のE_y、H_xを、式(3-56)に代入して微分計算をすると

$$E_{y0} \frac{1}{\omega t - k_0 z} \cdot (-k_0) e^{j(\omega t - k_0 z)} = \mu_0 \left(H_{x0} \frac{1}{\omega t - k_0 z} \omega \right) e^{j(\omega t - k_0 z)}$$

$$-E_{y0} k_0 = \mu_0 H_{x0} \omega$$

ここで、 $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ より

$$-E_{y0} \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \mu_0 \epsilon_0 H_{x0} \omega$$

$$\frac{E_{y0}}{H_{x0}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (3-57)$$

具体的な値は出ないにせよ、電界と磁界の比というものが求まりました。同様に計算を他の成分についても行い、電界と磁界の関係を求めると、

$$\sqrt{\epsilon_0} E_{x0} = \sqrt{\mu_0} H_{y0} \quad (3-58)$$

$$-\sqrt{\epsilon_0} E_{y0} = \sqrt{\mu_0} H_{x0} \quad (3-59)$$

$$E_{z0} = 0 \quad H_{z0} = 0 \quad (3-60)$$

という関係式が得られます。こうして進行方向zである電磁波から、いくつかの関係式が得られました。これらの式から次のようなことがいえます。

- (1) 式(3-60)より、平面波は進行方向に電磁界を持たない一種の横波である(この主の波をTE M波といいます)。
- (2) 電界と磁界は互いに垂直(E_{x0}に対しH_{y0}、E_{y0}に対しH_{x0}という関係から)で、その大きさの比は次の関係を保っている。

$$\frac{E_{x0}}{H_{y0}} = \frac{E_{y0}}{H_{x0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = Z_0 \quad (3-61)$$

ここにZ₀は波動インピーダンスといいます。自由空間を伝送線路として考えたとき、電界を電圧、磁界を電流に例えたものです。真空中ではZ₀=376.7 [Ω]となります。

- (3) 電磁波の進行方向は、EからHに向かって外積をとった、そのベクトル方向となる。もしくはEからHに向かって右ネジを回したときの右ネジの進む方向といえる。つまり進行方向はE × Hの方向なのです。

以上のことを踏まえて図3-4の進行波パターンをもう一度見て下さい。この図が平面波を表している

ことがもうわかると思います。

3-6 導電媒質中の平面波

今まで絶縁媒質の中の平面波というものを考えてまいりました。"え!?!、そうなの?" と思った方、マクスウェルの電磁方程式のところを読みなおしてみてください。ちゃんと各個の中に絶縁媒質中の平面波という言葉が出ています。これから考えるのは絶縁媒質ではなく導電媒質中の平面波です。導電媒質とはどんなものかということ、 $\sigma = 0$ の領域のことです。究極的に $\sigma \rightarrow \infty$ と考えればそれは完全導体中ということ。この $\sigma = 0$ というのは単純に導体内と考えてしまいそうですが、正確にいうと水や空気なども $\sigma = 0$ なのです。このときマクスウェルの方程式は媒質中に流れる導電電流も考えに入れなければならず、絶縁媒質のように $J=0$ とすることはできません。つまり

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (3-62)$$

です。もうすでに $\mathbf{J} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$ にしてしまっていますが、この方がなにかと計算が楽なので、これから \mathbf{J} を使います。さて、この媒質中に流れる電流はすなわち $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ のことですから、

$$\text{rot}\mathbf{H} = \Delta\mathbf{E} + j\omega\epsilon\mathbf{E} = j\omega\left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\mathbf{E} \quad (3-63)$$

いま、

$$\epsilon' = j\omega\left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)$$

とすれば

$$\text{rot}\mathbf{H} = j\omega\epsilon'\mathbf{E} \quad (3-64)$$

こうしますと波数 k は

$$k = \omega\sqrt{\epsilon'\mu} = \omega\sqrt{\left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\mu} \quad (3-65)$$

したがって波数 k は複素数となります。ところで

$$\mathbf{E} = E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (3-66)$$

$$\mathbf{H} = H_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (3-67)$$

ですから、この式に、先程求めた波数を入れてやればどんなふうに伝わるのかがわかります。しかし、 k の式は随分複雑ですから

$$k = \omega\sqrt{\left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\mu} = \beta - j\alpha \quad (3-68)$$

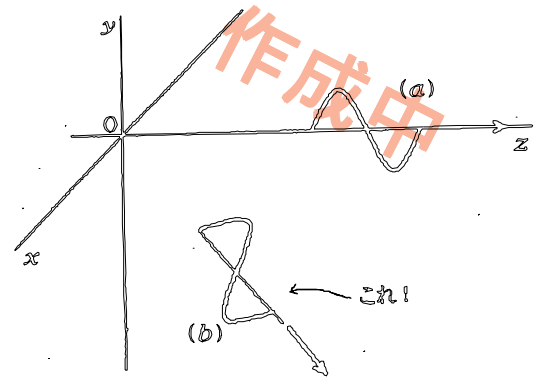


図3-11 軸上以外に伝搬方向を持つ波

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\omega^2\mu\epsilon\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2} + 1} - 1\right) \quad (3-69)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\omega^2\mu\epsilon\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2} + 1} + 1\right) \quad (3-70)$$

と、虚部を α 、実部を β としてしまいます。、ともに複雑な形をしていますが、とにかく電導媒質中における平面波の波数 k は $\beta - j\alpha$ と複素数で表されることがポイントです。これを式(3-66)や式(3-67)に代入すると、 α と β の意味がわかってきます。ここでは式(3-66)に代入してみますと

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 e^{-jkz} e^{j\omega t} = E_0 e^{-j(\beta - j\alpha)z} e^{j\omega t} \\ &= E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (3-71)$$

となります。この式から距離 z が大きくなる(波源から離れていく)と $e^{-\alpha z}$ の項が効いてきて E が小さくなってゆきます。つまり電磁波は伝搬方向に向かって減衰してゆくのです。この α を減衰定数と呼んでおります。そして、

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-jkz} e^{j\omega t}$$

において e^{-jkz} の jk の部分を伝搬定数と呼んでおり、一般に $\mathbf{E} = E_0 e^{-jkz} e^{j\omega t}$ で表されます($\mathbf{E} = E_0 e^{-j(\beta - j\alpha)z} e^{j\omega t}$)。また、 β がこの場合の位相定数です。

さて、この α の値が大きければ電磁波はすぐに減少します。そして、 α は σ が大きければ大きくなるわけですから、導電性の良い導体などに電波がきたら導体を通過する前はかなり減衰してしまうことが直感的にわかると思います。このように導体内に入射した電磁波が急速に減衰する現象を表皮効果といえます。

3-6-1 三次元における波の指数関数表示

今まで考えていた波は直交座標系で z 方向にのみ

進むものでした(図3-4)。しかし一般的には図3-11のように直交座標系の中を進行方向が特に軸上にはのらないものを考えます。このような波は波動方程式が

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (3-72)$$

というように表されます。この波動方程式の特別解は指数関数表示ですと、

$$W = (A_1 e^{-jk_1 x} + B_1 e^{+jk_1 x}) (A_2 e^{-jk_2 y} + B_2 e^{+jk_2 y}) (A_3 e^{-jk_3 z} + B_3 e^{+jk_3 z}) \quad (3-73)$$

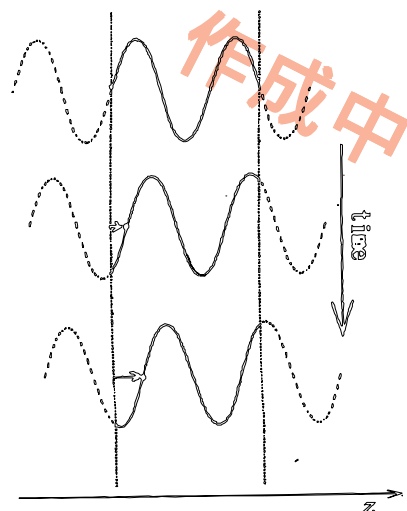
と表すことができます。ここで、 k_1, k_2, k_3 は x, y, z 方向への位相定数です。波が伝わるにあたっては、ある一点でこの伝搬する波をみるとすればちょうど位相がずりずりと変化していくように見えるわけで、これを位相速度といいます(図3-12)。

もし、波が斜めに進むとすれば波の位相が変化していく速度も今までのように進行方向の軸上から見たものとは違って見えます。つまり図3-11のように位相定数が進行方向の軸上にある b 者と、そうでない a 者とは違うのです。ここでちょっとだけ位相定数を復習してみましょう。与えられた時間 t に対してその波の進行方向距離 $r=0$ のものより、進行方向へ x だけ離れた $r=x$ の地点では $r=0$ より位相が $k_0 x$ だけ遅れています。ここで位相の遅れがちょうど 2π 、すなわち $r=2\pi/k_0$ となる距離を波長として λ で表します。つまり

$$k_0 \lambda = 2\pi \quad (3-74)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_0} \quad (3-75)$$

という式が生まれました。またさらに式変形を行えば



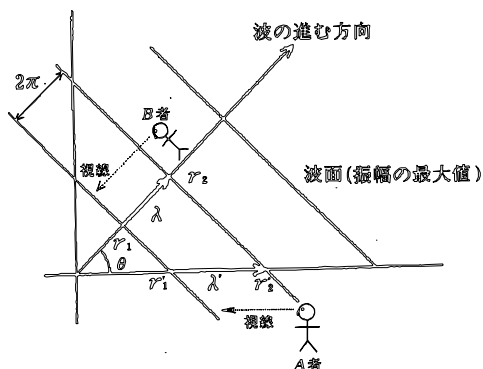
位相速度は、波においてある点の位相が、単位時間にどれだけ進むかを表します。

図3-12 位相速度

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{\omega}{v} \quad (\omega = 2\pi f) \quad (3-76)$$

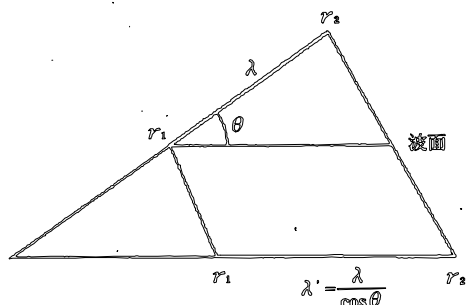
となります。

さて、 b 者においては λ という距離 ($r_2 - r_1$) で 2π の位相遅れとみることができますが、 a 者からこの波をみたらどうでしょうか。 a 者は x 軸上で一波長を r_1' から r_2' とみます。これは a 者が x 軸上としての距離でみているからです。この $r_1' - r_2'$ という距離は、 a 者が観測した 2π の距離よりも長いことがわかるとおもいます。 a 者の観測した 2π の距離と b 者の観測した λ の距離は次のような関係があります。



$\lambda < \lambda'$ であるので、A者からみた位相速度は光速を超えることになる。

(a)



(b)

図3-13 観測者の位置により位相速度が変わる

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\cos \theta} \quad (3-77)$$

ところで、平面波の腹が r_1 から r_2 へ伝わる時間も r_1' から r_2' へ伝わる時間も同じです。そこへきて、距離が x 成分の方が $1/\cos$ だけ長い、つまり x 軸方向への位相速度は、

$$v_x = \frac{v}{\cos \theta} \quad (3-78)$$

となるのです。ところで電磁波の伝搬速度は光速とほぼ等しいのですから式の上では波の x 成分は光速を越えるという面白いことになります。もちろん、光速を超えるのは位相速度だけであって、波そのものの伝搬速度が光速を超える訳ではありません。なにゆえ位相速度だけが光速を越えることができるのかを図3-14に示します。B者は波面のある一点のみを見ているのに対し、A者は異なった点を見ているのです。これがA者から見ると位相速度が光速を越えてしまう理由なのです。さて x 軸方向の位相定数は、

$$k_x = \frac{\omega}{v_x} = \frac{\omega}{\frac{v}{\cos \theta}} = k_0 \cos \theta \quad (3-79)$$

となります。これと同じことを y 方向についてもやれば

$$k_y = k_0 \sin \theta \quad (3-80)$$

となって、平面波の式は反射が無いとすると、

$$\mathbf{W} = A e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{j\omega t} = A e^{-j(x \cos \theta + y \sin \theta)} e^{j\omega t} \quad (3-81)$$

というようになり、軸上に沿って伝搬しない電磁波は、各成分によって位相定数が表されるようになります。

3-7 ポインティングベクトル

磁界や電界によって空間にエネルギーが蓄えられるということは式(1-116)や式(2-43)でご存知のことかと思えます。エネルギーと言われても目に見える物ではないのでどうもイメージがつかみにくいかもしれませんが、まあここではこのエネルギーというものは元々は電気であったものが磁界やら電界やらの形に変えて保存されているとでも思っておきましょう。

さて、電磁波というものは磁界が電界を作り、その電界が磁界をつくるといった形で伝搬していくことはすでに述べました。エネルギーとしてみれば磁界によって蓄えられたエネルギーが電界を作るエネルギーとして使われ、電界エネルギーとなる。そしてその電界エネルギーが今度は磁界を作るエネルギー源となり、磁界を作りその磁界にエネルギーを

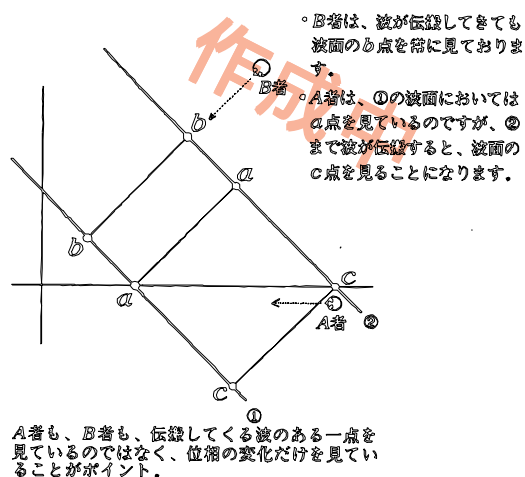


図3-14 位相速度は光速を超える！

移し変える。といったように磁界から電界、電界から磁界へエネルギーが受け渡されていきます。つまり電磁波にはエネルギーの伝搬があるわけです。そして単位断面積を通して単位時間に流れるエネルギーをベクトル \mathbf{S} で表したものを一般にポインティングベクトルといいます。これはポインティングさんが提案したからポインティングベクトルと言う訳で、POINTING(指示する)のポインティングとは違います。しかしながらスペルこそ違えど意味的にはうまくあっておりおもしろいものです。

それではポインティングベクトルが何物であるのかがわかってきたところで実際に電磁波のエネルギーの移動という物に付いて詳しく述べましょう。まずマックスウェルの電磁方程式をもってきます。

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3-82)$$

左辺は磁界についてを表し、右辺は電流についてを表しております。いま知りたいのは電力についてですからこの式を電力を表す式にしなければなりません。左辺はともかく右辺は電流源を含みますから \mathbf{E} を掛ければ(内積をとる)、電力の式らしくなります。つまり $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ という電力ベクトルで表すことができます。電気の世界での電力が $V I$ で表されていたのと同じような感覚で覚えておきましょう。そのようなわけでまずは \mathbf{E} による内積をとってみます。

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3-83)$$

ここで、この式を簡単に説明しておきますと、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ は単位体積内で消費されるオーム性電力です。 $\mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t)$ というのは静電界のところででてきた静電エネルギーの $(1/2) \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ に似ていると気づいたでしょうか。この式は偏微分で表されていますから、単位体積内に蓄えられたエネルギーの増加率、つま

りは蓄積エネルギーを増加させる瞬時電力です。のこった $\text{rot}\mathbf{H}$ というのはなんだかよくわかりません。わからないのでベクトル公式

$$\text{Arot}\mathbf{B} = \mathbf{Brot}\mathbf{A} - \text{div}\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (3-84)$$

を使って分解してみると

$$\mathbf{Hrot}\mathbf{E} - \text{div}\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3-85)$$

となります。まだこのままでは何だかよくわかりませんが、マックスウェルのもう一つの式

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3-86)$$

を代入しますと

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3-87)$$

という式が得られます。ここで $H(B/t)$ というのもエネルギーと表すことに気づかれたでしょうか ($W = (1/2)\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ を思い出して)。

これで役者がそろいました。この式を見やすくして

$$-\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3-88)$$

と書き直しますと、オーム性の電力と磁界・電界のエネルギー、そして $-\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ という何やら怪しげなものがでてまいりましたが、これについてはもう少し説明を後にするとしまして、もう少し式を変形いたします。電界や磁界のエネルギーを表すと言っていた式ですが、これらは

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} E^2 \right) \quad (3-89)$$

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{2} H^2 \right) \quad (3-90)$$

と変形しまして

$$-\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \quad (3-91)$$

そして、これらは単位体積でのことですから、体積全体を考えるために全体を積分(体積積分)してやれば

$$-\int \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv \quad (3-92)$$

ここで発散の定理

$$\int \text{div}\mathbf{A} dv = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (3-93)$$

をつかえば

$$-\oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv \quad (3-94)$$

という式になりました。結局右辺の第一項目の式は体積内で消費される全体のオーム性電力、第二項は電界と磁界に蓄えられるエネルギーの時間増加率。つまり体積内の蓄積エネルギーを増加させる瞬時電力です。さて、この右辺は体積内にあるものを集めて表されるエネルギーですが、左辺は体積を囲む閉曲面についてを集めるもの、つまり外にでて行ってしまうものを集めることを表しております。この外にでて行ってしまうもの(エネルギー)が、実は電磁波が運んで行く電力を表しているのです。そしてこの \mathbf{E} と \mathbf{H} の外積

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3-95)$$

の \mathbf{S} をポインティングベクトルといい $[W/m^2]$ の単位を持つ瞬時電力密度なのです。なお、この式で表されるポインティングベクトルは \mathbf{E} と \mathbf{H} が同相であるときです。もし位相が異なるとすると

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (3-96)$$

と表されポインティングベクトルは複素量となります。そして電磁波電力はこの実部から計算されます。特に式(3-96)について導きやら何やらと詳しくはやりません。電気回路において有効電力とか無効電力というものを一度学習しておきますと複素ポインティングベクトルについても何となくわかってくると思います。そのあたりは参考文献におまかせするとします。

3-8 偏波

z 方向へ伝搬する平面波は、電界と磁界が式(3-57)、式(3-58)、式(3-59)のような関係にありました。式(3-57)では電界の x 成分に $\sqrt{\epsilon_0}$ をかけたものは、それに直交する磁界成分(つまり磁界の y 成分)に $\sqrt{\mu_0}$ をかけたものに等しいという関係で電磁波が存在することをいい、式(3-58)では電界が y 、磁界が x 成分で式(3-57)と同じことがいえる電磁波が存在することをいいます。そして式(3-59)で式(3-57)、式(3-58)どちらも進行方向に電界・磁界がない、つまり平面波であることを示しています。また式(3-57)、式(3-58)で表される平面電磁波の進行方向はどちらも同じです。ここで、電界の方向と波の進行方向のなす面を偏波面といいます。そして、図3-15(a)の電磁波は偏波面が水平方向であるので水平偏波、(b)の電磁波は偏波面が垂直であるので垂直偏波と呼び、水平偏波や垂直偏波のように偏波面が常にひとつの平面

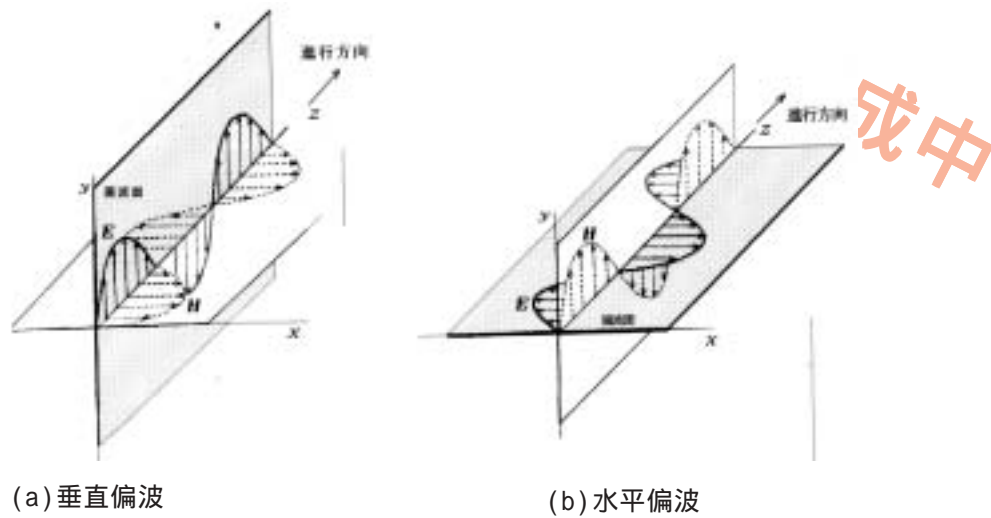


図3-15 直線偏波

であるような電磁波を直線偏波といいます。水平偏波と垂直偏波は電界・磁界の偏波面がちょうど90°異なっており、互いに直交関係にあるといえます。

さて、ここで垂直偏波と水平偏波の合成された波を考えてみましょう。ひとまず磁界は電界と面が90°異なるだけで大きさの変化のしかたは電界と同じですから、波の合成は電界が磁界のどちらか一方のみを考えれば事足ります。ですから、ここでは電界についてのみ考えてみることにしましょう。

図3-15 直線偏波

水平偏波と垂直偏波の電界成分を各成分の単位方向ベクトルを使って表すと、

$$\mathbf{i}E_x = \mathbf{i}E_{x0}e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (\text{水平}) \quad (3-97)$$

$$\mathbf{j}E_y = \mathbf{j}E_{y0}e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (\text{垂直}) \quad (3-98)$$

で表すことができます。また \mathbf{i} は x 方向への、 \mathbf{j} は y 方向への単位ベクトルです。sin や cos などこれら波を表せば、オイラーの公式による展開と、実数部のみが実際に観測できることから、

$$\mathbf{i}E_x = \mathbf{i}E_{x0} \cos(\omega t - k_0 z)$$

$$\mathbf{j}E_y = \mathbf{j}E_{y0} \cos(\omega t - k_0 z)$$

と表すことができます。この 2 式を合成した波 E は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y = (\mathbf{i}E_{x0} + \mathbf{j}E_{y0})\cos(\omega t - k_0 z) \quad (3-99)$$

となります。この式は図3-16のように斜めに偏波面を持った直線偏波の電磁波となります。

さて、合成される波の位相が図3-17のようにずれていると、電磁波の偏波面はひとつの面内に収まらなくなります。図3-17のとつひとつの電界を合成してみてください。ひとつひとつの電界の向きを軌跡をとってみれば、進行方向の軸のまわりをらせん上に

回っていることに気付くでしょう。また、位相をどんだんずらしていくと、今度は回転方向が逆さまになります。いま E_x, E_y のふたつの電磁波の大きさが等しいのならば、合成された電界を電磁波の進行方向から眺めると、ちょうど円を描いているように見えます。このような電磁波を円偏波といいます。ここで、円偏波の回転方向を見てみますが、これがちょっとややこしいのです。図3-17において(a)は右・左どっちに回転しているかと尋ねられれば、たいていは右回転と答えるでしょう。これは時間を固定したとき、送信から受信に向かって電界の軌跡をとったときの回転方向で、光学の偏波の回転の定義がこれに相当します。ところが電磁波の場合はこの逆で、受信点で伝搬してきた電界を観測して、その回転方向が偏波の回転方向となるのです。したがって回転方向は図3-17のように普通に考えた方向とは逆になります。電磁波の場合、受信アンテナに到達した電磁波見て、電界の向きが時間が経つにつれてどのように変化(回転)しているかを見ているのです。

さて、 E_x, E_y の大きさが等しいと合成された電磁波は円偏波となりましたが、もし大きさが異なっていたらどうでしょうか。この時電界のとり軌道を正

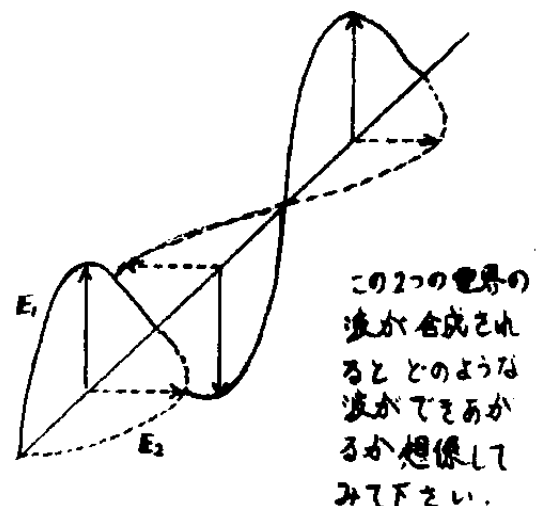


図3-16 偏波面がなな斜めになる電磁波

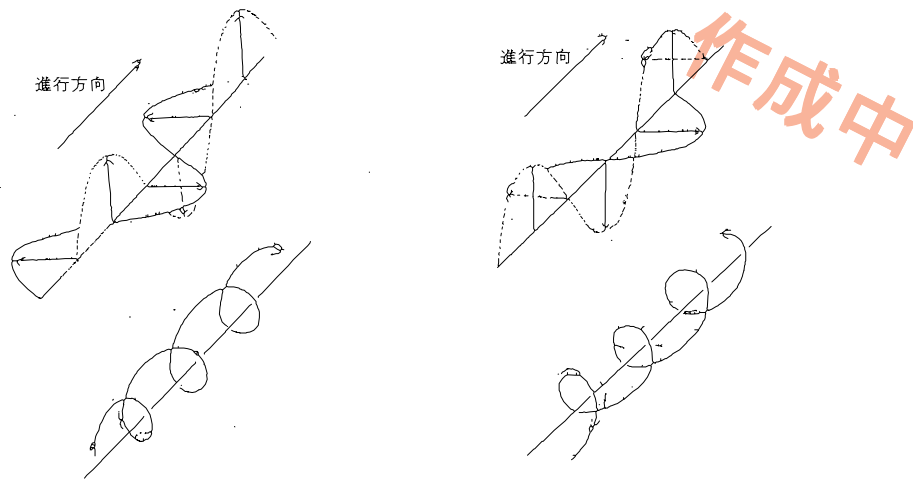


図3-19 円偏波

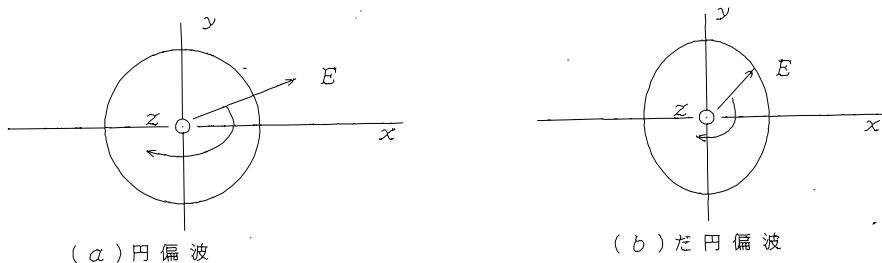


図3-18

面から見ると、だ円となり、これをだ円偏波といいます。このだ円偏波は E_x と E_y の大きさが異なるふたつの直線偏波の合成として表される他に、右まわり、左まわりの円偏波の合成としても表すことができます。

3-9 境界条件

光や音と同じように伝搬している波が壁にぶつくと、壁の種類により反射したり透過したりします。つまり波は空気という媒質と壁という媒質の境にて反射なり何なり起こるのです。一般的に言えば二つの異なった媒質がある曲面で接している場合に、その接触面がひとつの境界面となり、その両側で電磁界にある種の不連続を生ずると考えられます。このような境界の両側における電磁界の関係を境界条件といいます。この境界条件を知ることにより、媒質により電磁波がどのような反射、透過が起こるか知ることができます。一般に境界条件は四つあり、このひとつひとつを説明することに致します。まずマックスウェルの方程式を j を使って表したものを次に出しておきます。

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \quad (3-100)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \quad (3-101)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (3-102)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho \quad (3-103)$$

また境界条件を出すにあたり、その方法を簡単に述べておきましょう。今境界を図3-17のように非常に薄いのではあるけれどもある厚さ t を持っていた層になっているとします。この中で電磁界が連続

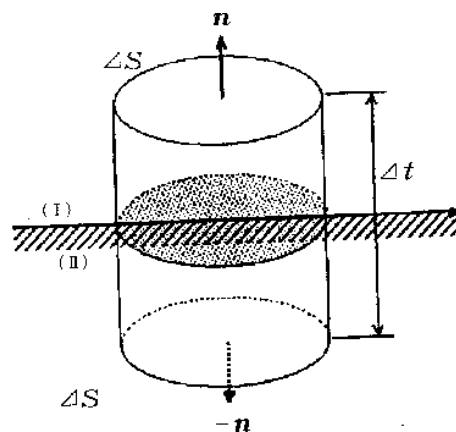


図3-20 境界条件

的に変わっていくと考え、最後にこの厚さを t を 0 とした極限を求めるといった方法をとります。

式(3-102)より

図3-17において式(3-102)を当てはめてみます。

$$\text{div}\mathbf{B} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2) \Delta S = 0$$

$$\therefore \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2) \quad (3-104)$$

この式は境界を貫く磁界の法線成分は同じということを示します。

式(3-103)より

と同じように計算を行います。注意すべきは電荷 ρ があることです。結果として、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 \Delta S - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 \Delta S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\rho \Delta S \Delta t) \quad (3-105)$$

となります。 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\rho \Delta S \Delta t)$ は厚さ t が 0 となることで

すから、面電荷を表すこととなります。いま、この面電荷を ρ_m とおくと、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 \Delta S - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 \Delta S = \rho_m \quad (3-106)$$

この式はもし境界面に電荷が帯電しているのなら \mathbf{D} の接線成分は不連続、また ρ_m が存在しなければ \mathbf{B} と同じように電束の法線成分は同じということです。

式(3-101)式より

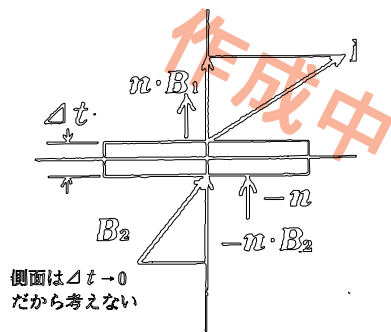


図3-20 磁束の境界条件

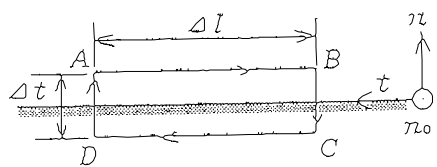
式(3-101)にてストークスの定理を用いましょう。まず式(3-101)を面積積分してストークスの定理を適用、 $t \rightarrow 0$ の時どうなるかをみてみます。ただ図3-21(a)をみて、 $\text{rot}\mathbf{E}$ を面積分といってもピンと来ないでしょうから、図3-21(b)を用意しました。この図(a)のEBCDをひとつの面とした直方体を考えます。ストークスの定理はこの各面 dS_1 から dS_5 の rot をとったときにその結果が ABCD の線積分と同じということですから、

$$\int_S \text{rot}\mathbf{E} dS = \int_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3-107)$$

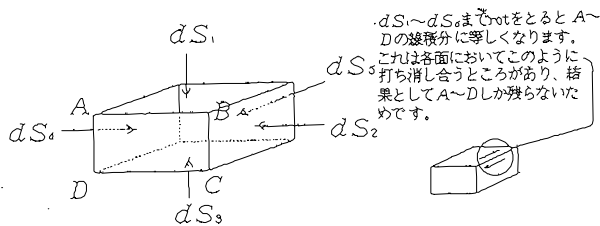
です。すなわち (b) 式の左辺は $t \rightarrow 0$ とすると、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_S \text{rot}\mathbf{E} dS = t \cdot \mathbf{E}_1 \Delta l - t \cdot \mathbf{E}_2 \Delta l = t(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \Delta l \quad (3-108)$$

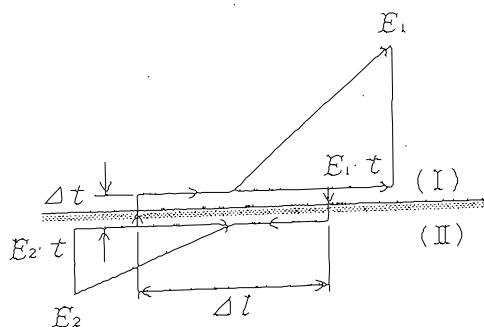
そして、右辺はというと、 $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ の面積分、つまり \mathbf{B}



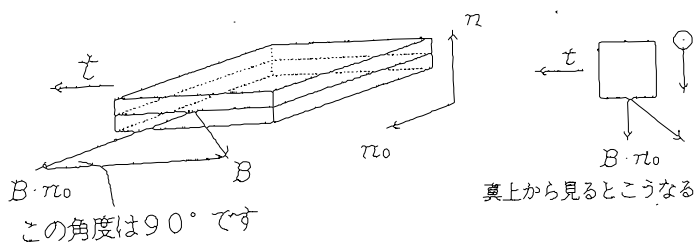
(a)



(b)



(c)



(d)

図3-21 ストークスの定理から

の ABCD の垂直成分 (すなわち $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$) と面積 ($\Delta t \times \Delta l$) の積ですから

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} j\omega \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} j\omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} (\Delta t \times \Delta l) = 0$$

(3-109)

結局以上から

$$\mathbf{t}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\Delta l = 0 \quad (3-110)$$

という結果が得られます。ここで図 3-21 (d) から

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}$$

$$(\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n})(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\Delta l = \mathbf{n}_0(\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)) = 0 \quad (3-111)$$

ここで、この式で $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ の rot の値をそれぞれとったことと、その値の接線方向の値をそれぞれとって、も大きさ関係は同じですから

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (3-112)$$

ということになります。結局この式の意味するところは \mathbf{E} の接線ベクトルが連続、すなわち境界の両側における電界の接線成分は等しいということです。

図 3-21 (c) で $\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}$ というのとわかりやすいでしょうか。

式(3-100)より

式(3-100)においてと同様な計算を行います。ただし、 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (σ は導電率) というものに対して行うのです。

$$\mathbf{t}(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{(\mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n}_0 \Delta t\} = 0$$

$$\therefore \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad (3-113)$$

得られた式の意味は境界の両側における磁界の接線成分は等しいということです。

3-10 平面波の反射・透過

電磁波が境界面に入射すると反射なり透過なり起こります。この反射なり透過なりがあるからこそ電波伝搬というものは面白いものなのです。特に無線をやっている人などは実感できると思うのですが、富士山に電波をぶつけるとうまい具合に目的とするところに電波が飛んでいくとか、ちょっと大掛かりなものとして、空に浮かんでいるお月様を電波の反射版として通信を行うものもあたりで、電波の反射の性質というものを知ることによりどのようなものに反射させればどのように飛んでいくのか予想がついて面白いものです。それにしても月に電波を反射させて通信するなんて信じられないようですが、実際に行っている人がいるのですから驚きです。考えようによっては声だけは月面に行っているということでしょうか。

平面波というものは、地上に対し電界が水平である水平偏波と電界が地上に対し垂直である垂直偏波

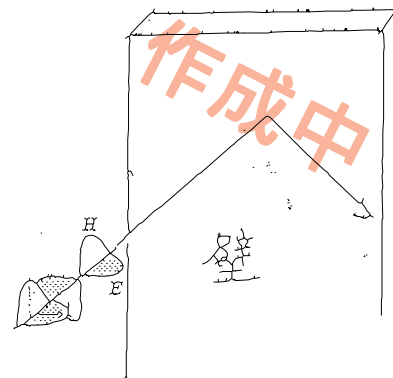


図 3-22 反射のイメージ

というものがあることは平面波のところでお話しました。この水平偏波と垂直偏波とでは反射の性質が違っていて、これから水平偏波と垂直偏波とで分けて反射についてを述べることに致しましょう。

3-10-1 水平偏波が、垂直におかれた壁に反射する場合

電磁波の反射、透過は先にやった境界条件を満たしながら起こります。いま、図 3-22 のように電界が大地と水平、磁界が大地と垂直な電磁波が入射角を持って壁にぶつかるします。

図 3-22 にて電磁波が斜めに入射するというイメージをつかんでいただいたところで、図 3-20 を真上から見下ろした図を使って具体的に反射・透過の話を進めます。

この角で i により斜めに入射した電磁波が反射するときの角度 r や透過したときの角度 t はどのようになるのかを考えてみましょう。まず図 3-23 のように入射波が壁にぶつかり反射し、残りが透過します。ところでこれからは、媒質 I と媒質 II の関係が次のようなものとして考えていきます。

媒質 I	ϵ_0	μ_0
媒質 II	ϵ	μ
$0 <$	μ_0	μ

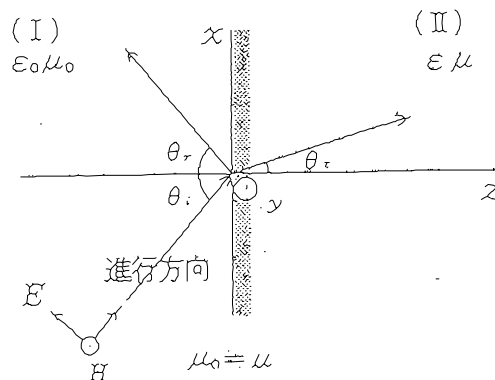


図 3-23 水平偏波の反射・透過

まず、入射波・反射波・透過波について、電磁界を表す式をたてます。今一度 " 三次元における波の指数関数表示 " の項を参照してから以下の式の意味を確認してください。ところで、水平偏波ですから電界は x 方向・z 方向に成分を持ち、磁界は y 方向成分しかありません。

$$E_{ix} = \cos \theta_i E_i e^{-jk_0(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (3-114)$$

$$E_{iy} = \sin \theta_i E_i e^{-jk_0(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (3-115)$$

$$H_{ix} = \frac{1}{Z} E_i e^{-jk_0(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (3-116)$$

また反射波、磁界の向きが反射しても変わらないとすれば電界の向きは図 3-23 のようになり(電磁波の進む方向と磁界・電界の向き、思いだしてください)

$$E_{rx} = -\cos \theta_r E_r e^{-jk_0(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \quad (3-117)$$

$$E_{ry} = -\sin \theta_r E_r e^{-jk_0(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \quad (3-118)$$

$$H_{ry} = \frac{1}{Z} E_r e^{-jk_0(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \quad (3-119)$$

そして透過波の成分は

$$E_{tx} = \cos \theta_t E_t e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \quad (3-120)$$

$$E_{ty} = -\sin \theta_t E_t e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \quad (3-121)$$

$$H_{tx} = \frac{1}{Z_2} E_t e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \quad (3-122)$$

と表されます。この入射波・反射波・透過波の三つの式群が境界条件を満たしながら反射・透過を起こすのです。さて、境界条件についてはまだ記憶に新しいと思います。境界、すなわち $z = 0$ の地点において境界条件 " 電界の接線方向の大きさは等しい " ということから電界の x 成分を使って方程式を立ててみますと

$$E_{ix} + E_{rx} = E_{tx} \quad (3-123)$$

より、

$$E_i \cos \theta_i e^{-jk_0 \sin \theta_i} + (-E_r \cos \theta_r e^{-jk_0 \sin \theta_r}) = E_t \cos \theta_t e^{-jk_2 x \sin \theta_t} \quad (3-124)$$

という式が得られます。ここで注意すべきは、媒質の電界は入射波の電界と反射波の電界の和であるということです。この式において、入射波・反射波・透過波は境界面において位相が同じ(但し境界面に電荷が無いものとします)、つまり境界面において連続であるということから以下の式が導かれます。

・ $z = 0$ にて入射波と反射波の位相が等しい

$$k_0 x \sin \theta_i = k_0 x \sin \theta_r$$

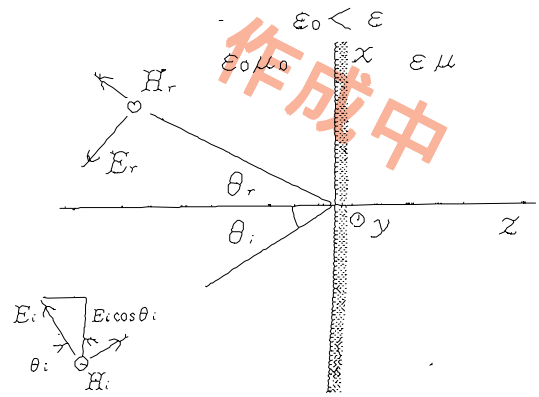


図 23-24 水平偏波の反射

$$\therefore \sin \theta_i = \sin \theta_r \quad (3-125)$$

・ $z = 0$ にて入射波の位相と透過波の位相が等しい

$$k_0 x \sin \theta_i = k_2 x \sin \theta_t$$

$$\therefore k_0 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t \quad (3-126)$$

以上のように二つの式が位相による条件からでてきました。式(3-125)は電磁波の入射角と反射角が等しいことを意味し、式(3-126)からは誘電率の比に応じて透過角が決まることを意味します。特に式(3-126)は snell の法則と呼ばれるもので、光学などで有名なものです。どこかでこの法則の名前ぐらいは聞いたことがあるのではないのでしょうか。なお、式

$$(3-126) \text{ の意味をはっきりさせる為には、 } k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0},$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu \epsilon}, \text{ また } \mu_0 \equiv \mu \text{ としてこれら関係を使って}$$

$$\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sin \theta_i = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sin \theta_t,$$

$$\therefore \sqrt{\epsilon_0} \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon} \sin \theta_t \quad (3-127)$$

と表せば、先に述べた意味がわかってくると思います。次に入射波と反射波・透過波の振幅の関係をみてみます。境界において媒質の入射波電界と反射波電界の和と、媒質の透過波の電界の振幅は連続している、つまり境界面において、電界の接線方向は等しいわけですから

$$E_i \cos \theta_i + (-E_r \cos \theta_r) = E_t \cos \theta_t$$

$$(i = r \text{ で、 } i \text{ にて表しました}) \quad (3-128)$$

という式が成立いたします。また視点を磁界におけば、

$$\frac{1}{Z_1} E_i + \frac{1}{Z_1} E_r = \frac{1}{Z_2} E_t \quad (3-129)$$

となります。この二つの式から入射波に対し反射波や透過波の振幅の大きさ関係がわかってまいります。まず入射波と反射波の大きさの関係を求めてみましょう。

式(3-124)、式(3-125)から透過波の成分を消去すると

$$\frac{(E_i - E_r)\cos\theta_i}{\cos\theta_t} = \frac{Z_2}{Z_1} E_i + \frac{Z_2}{Z_1} E_r$$

$$E_i \left(\cos\theta_i - \frac{Z_2}{Z_1} \cos\theta_t \right) = E_r \cos\theta_t + \frac{Z_2}{Z_1} \cos\theta_t \quad (3-130)$$

という式になります。波の反射においてはどの程度反射されるのかその度合いを示す反射係数 R_p (R はreference, p は水平偏波のparallel)というものがあります。入射波に対する反射波の強さということで、式(3-130)を使って

$$R_p = \frac{E_{rx}}{E_{ix}} = \frac{E_r \cos\theta_r}{E_i \cos\theta_i} = \frac{E_r}{E_i}$$

$$\frac{\cos\theta_i - (Z_2/Z_1)\cos\theta_t}{\cos\theta_i + (Z_2/Z_1)\cos\theta_t} = \frac{k \cos\theta_i - k_0 \cos\theta_t}{k \cos\theta_i + k_0 \cos\theta_t} \quad (3-131)$$

という式で表されます。この式は電界の振幅における反射係数ですから特に振幅反射係数ともいいます。この反射係数がわかれば入射電界振幅と入射角、境界面の各媒質から反射波の振幅を求めることができます。

$$E_{rx} = R_p E_{ix} \quad (3-132)$$

但し、この電界は境界面の接線方向の電界ですからちょっと注意のほどを・・・。

さて、式(3-127)は入射角と透過角という二つの角度が入っております。ところで入射角と反射角の間は式(3-122)という関係がありますから、式(3-126)を変形し ($\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を使います)

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{k_0}{k} \sin\theta_i \right)^2} \quad (3-133)$$

として式(3-127)に代入すれば

$$R_p = \frac{k^2 \cos\theta_i - k_0 \sqrt{k^2 - k_0^2 \sin^2\theta_i}}{k^2 \cos\theta_i + k_0 \sqrt{k^2 - k_0^2 \sin^2\theta_i}} \quad (3-134)$$

というように入射角と誘電率から反射係数を求めることができます。ここで入射角によっては $R_p=0$ 、すなわち反射が起こらない場合があり、これをブルースター角といいます。詳しくは改めて述べるとします。

反射の強さがどの程度かを表すのに反射係数というものがあるように、どれだけ透過するかを表す透過係数(振幅透過係数)というものがあります。定義によれば

$$T_p = \frac{E_{tx}}{E_{ix}} = \frac{E_t \cos\theta_t}{E_i \cos\theta_i} \quad (3-135)$$

出表されます。ここで式(3-128)、式(3-129)式から $E_i \cos\theta_i$ E_r を媒介変数として式を立てれば、

$$\frac{E_i \cos\theta_i - E_t \cos\theta_t}{\cos\theta_i} = \frac{Z_1}{Z_2} E_t - E_i$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{k_0 \cos\theta_i}{k \cos\theta_i + k_0 \cos\theta_t}$$

となりますから、式(3-131)より

$$T_p = \frac{E_t \cos\theta_t}{E_i \cos\theta_i} = \frac{2k_0 \cos\theta_t}{k \cos\theta_i + k_0 \cos\theta_t} \quad (3-136)$$

となります。反射波と同じように透過角を入射角で表せば結局

$$T_p = \frac{2k_0 \sqrt{k^2 - k_0^2 \sin^2\theta_i}}{k^2 \cos\theta_i + \sqrt{k^2 - k_0^2 \sin^2\theta_i}} \quad (3-137)$$

となります。この式においても電界の振幅における透過係数ですから振幅透過係数ということになります。

3-10-2 垂直偏波が、垂直の壁に反射するとき

さて、項して水平偏波の電磁波の反射について述べてまいりました。次は磁界が水平方向、電界が垂直方向にある垂直偏波について考えてみましょう。図3-22は図3-21と同様に電磁波を上からみた図です。まず入射波の電磁界を求めてみます。

$$E_i = E_{iy} e^{-jk_0(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} e^{j\omega t} \quad (3-138)$$

ちょっとここで復習がてらこの式の意味をいいますと、入射波の電界はy方向にしかありませんから、最大振幅は E_{iy} と表しました。また、この波はx方向とz方向に進みますから位相を表すところ ($-jk_0$)

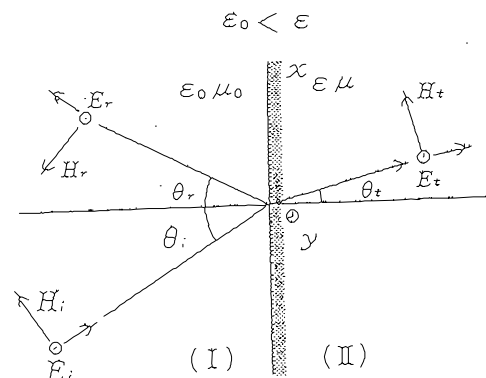


図3-25 垂直偏波の反射・透過

後のかっこ内)に進む方向を表す成分を入れておきます。次に磁界を求めますが、平面波における電界と磁界の大きさの関係は $H=(1/Z)E$ (但し、 H 成分と E 成分は直交関係) ですから各磁界の成分は、

$$H_{xi} = \frac{1}{Z} E_{yi} \cos \theta_i e^{-jk_0(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} e^{j\omega t} \quad (3-139)$$

$$H_{zi} = -\frac{1}{Z} E_{yi} \sin \theta_i e^{-jk_0(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} e^{j\omega t} \quad (3-140)$$

となります。負号がついたのは電界の方向と波の進む方向を考慮した為です。次に反射波、透過波については

$$E_r = E_{yr} e^{-jk_0(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)} e^{j\omega t} \quad (3-141)$$

$$H_{xr} = -\frac{1}{Z} E_{yr} \cos \theta_r e^{-jk_0(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)} e^{j\omega t} \quad (3-142)$$

$$H_{zr} = -\frac{1}{Z} E_{yr} \sin \theta_r e^{-jk_0(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)} e^{j\omega t} \quad (3-143)$$

$$E_t = E_{yt} e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} e^{j\omega t} \quad (3-144)$$

$$H_{xt} = -\frac{1}{Z_2} E_{yt} \cos \theta_t e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} e^{j\omega t} \quad (3-145)$$

$$H_{zt} = -\frac{1}{Z_2} E_{yt} \sin \theta_t e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} e^{j\omega t} \quad (3-146)$$

以上の三つの式群から水平偏波と同様に、位相・振幅の連続条件を考えれば snell の法則を導くことができます。

振幅に関して、振幅反射係数と振幅透過係数を導いてみます。 $z = 0$ にて電界では

$$E_{yi} + E_{ri} = E_{yt} \quad (3-147)$$

磁界では

$$H_{xi} + H_{xr} = H_{xt} \quad (3-148)$$

となりますから

$$-\frac{1}{Z_1} E_{yi} \cos \theta_i + \frac{1}{Z_1} E_{ri} \cos \theta_r = \frac{1}{Z_2} E_{yt} \cos \theta_t$$

$$(E_{yi} - E_{ri}) \frac{1}{Z_2} \cos \theta_i = E_{yt} \frac{1}{Z_2} \cos \theta_t \quad (3-149)$$

ここで式(3-147)、式(3-149)を連立させて反射係数を求めれば ($\mu_0 = \mu$ とします)、

$$R_s = \frac{k_0 \cos \theta_i - k \sin \theta_t}{k_0 \cos \theta_i + k \sin \theta_t} \quad (3-150)$$

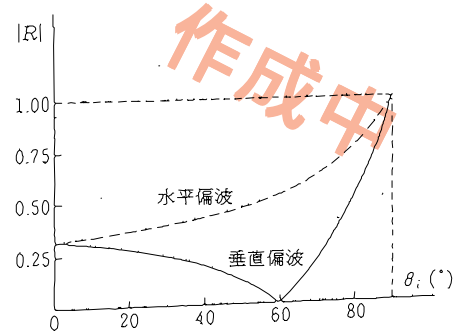


図 3-26 ブルースター角

$$T_s = \frac{2k_0 \cos \theta_i}{k_0 \cos \theta_i + k \sin \theta_t} \quad (3-151)$$

という式が得られます。この式に snell の法則を代入して透過角を無くせば、

$$R_s = \frac{k_0 \cos \theta_i - \sqrt{k^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_i}}{k_0 \cos \theta_i + \sqrt{k^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (3-152)$$

$$T_s = \frac{2k_0 \cos \theta_i}{k_0 \cos \theta_i + \sqrt{k^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (3-153)$$

となります。

3-11 ブルースター角

水平偏波のところでも述べたのですが、入射角によっては反射が起こらなくなることがあります。また、このような現象は水平偏波の反射・透過では見ることができません。実際に水平・垂直偏波における、入射角に対する反射率を計算して図に示したものが図 3-26

です。ここで $\epsilon/\epsilon_0 = \sqrt{3}$ としてあります。こうして得

られた図 3-26 を見てみますと、水平偏波において

59° のところで反射が 0 になっております。垂直偏波では 0 になりません。この反射率が 0 となる入射角をブルースター角といいます。ブルースター角を求めるには $R_p = 0$ とおいてやれば求めることができます。ここで三角関数の公式を駆使して $R_p = 0$ となる B と媒質の関係求めてみますと、

$$\tan \theta_B = \frac{k}{k_0} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \quad (3-154)$$

という関係が得られます。

3-12 誘電率が小さい媒質へ入射したときの平面電磁波の振舞い

今まで電磁波は ϵ_0 という誘電率の媒質を伝搬してきた、 ϵ_0 より大きい ϵ という誘電率の媒質へ

たときの反射を考えてきました。ここではその逆で、誘電率の高い方から低い方へと電磁波が入射したときどうなるかを考えてみます。

ここで改めて式を立てたりする必要はなく、いままでの k_0 と k の関係をひっくり返せばいいのです。ここで k_0 を k とし k を k_0 として、なおかつ

$\epsilon_1 > \epsilon_2$ となっているものとします。当然 $\epsilon_1 > \epsilon_2$

であってもスネルの法則は成立いたしますから、入射角・反射角・透過角は図 3-27 のように $\theta_i = \theta_r$, $\theta_i < \theta_t$ となるのですが、入射角によっては入射した波がすべて反射されるという現象が起こります。ここで式(3-134)や式(3-152)を見てみましょう。これら式のなかに

$$\sqrt{k^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_i} \quad \left(= k \sqrt{1 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \sin^2 \theta_i} \right) \quad (3-155)$$

という項があることに注目してください。 $k_0 > k$ だと $(k_0/k)2\sin^2 \theta_i$ が 1 より大きくなる角度があるのです。ということはルートの中がマイナスになりこの部分が複素数となるのです。このルートの中がマイナスになったときに入射した波がすべて反射されるという全反射が起こります。式(3-134)を使って証明してみましょう。

$$R_p = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \sin^2 \theta_i} - \sqrt{\frac{k}{k_0}} \cos \theta_i}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \sin^2 \theta_i} + \sqrt{\frac{k}{k_0}} \cos \theta_i} \quad (3-156)$$

ここで

$$A = \sqrt{1 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \sin^2 \theta_i} \quad (3-157)$$

$$B = \sqrt{\frac{k}{k_0}} \cos \theta_i \quad (3-158)$$

とおけば

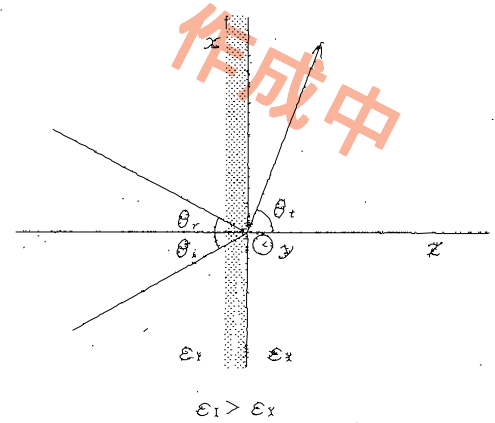
$$R_p = \frac{\sqrt{A} - B}{\sqrt{A} + B} \quad (3-159)$$

となります。いま、 A が負になったとしますと、

$$\sqrt{-A} = j\sqrt{A} \text{ より}$$

$$\frac{j\sqrt{A} - B}{j\sqrt{A} + B} = \frac{-A - 2j\sqrt{AB} + B^2}{A + B^2} \quad (3-160)$$

したがって絶対値 R_p は



$$|R_p| = \frac{\sqrt{(-A+B^2)^2 + (2\sqrt{AB})^2}}{A+B^2} = \frac{A+B^2}{A+B^2} = 1 \quad (3-161)$$

となって全反射となることが証明されます。垂直偏波の時も同じように計算することにより $|R_s| = 1$ が導かれます。

入射角を 0° から広げてちょうど全反射が起こる角度を臨界角といい、

$$\left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \sin^2 \theta_i = 1 \quad (3-162)$$

から

$$\sin \theta_i = \frac{k_0}{k} \quad \theta_i = \sin^{-1} \frac{k_0}{k} \quad (3-163)$$

と表されます。

図を書き直すのは大変なので、P1.exe 時代に作成した図(正確には、P1.exe 上で作成して、プリントアウトしていた図を)スキャナで取り込んで、ベクトルデータ化して貼り付けました。ベクトルデータ化したのは、ファイル容量を減らすためです。とても見難いとはおもいますが、ご勘弁ください。