

# プロジェクトのカオス現象

青木一三

Chaos of Projects

Ichizo Aoki

著者はベルハルストのロジスティックモデルを適用したプロジェクト模擬モデルを作り、このプロジェクト模擬モデルは現実のプロジェクトをほぼ記述できることを示した。次にロジスティックモデルから導かれるメイの差分方程式がカオス現象を示すことを参考にして、プロジェクト模擬モデルから導かれる差分方程式を使って数値実験を行った。プロジェクト模擬モデルのパラメーターを変えて多数の周期倍分岐図を作成し、プロジェクト模擬モデルが収束する領域、倍数リミットサイクルに入る領域、カオスに入る領域を明確にした。著者はこの結果を踏まえ、現実のプロジェクトで生じるカオス現象の原因と対策を考察する。

The author proposed a project mimic model by modifying Pierre Verhulst's logistic model. He demonstrated that this simple model could describe real project-phenomena. Then he has conducted extensive numerical experiments on a discrete-time model derived from proposed project mimic model and studied whole area by making bifurcation plot. Based on the results of the study, he stipulates the cause and avoidance of chaos phenomena in real projects.

Key words & Phrases: プロジェクト, カオス, ロジスティックモデル, プロジェクト模擬モデル, 周期倍分岐図  
Project, Chaos, Logistic Model, Project Mimic Model, Bifurcation Plot

## 1. はじめに

プロジェクトは必ず初めと終わりがある有期活動である。プロジェクトの作業の必要資金や要員の動員量などを時系列状に並べて表示すると図 1 のような山形のヒストグラムが得られる。グラフ表示にせず数値だけ集計したものは俗に山積表などと言われている。

これを全工期に渡って累積すれば（積分）作業員の動員量基準の進捗度が得られ、図 2 のような S 字状のシグモイド曲線となる。

さて、シグモイド曲線を示すものにロジスティックモデル<sup>[1]</sup>というものがある。このロジスティックモデルは現象が連続であるとして微分方程式表現となっているが、これをそのまま差分方程式にすると、カオス現象を示すことがロバート・メイ<sup>[2]</sup>の数値実験によって発見されたことは有名である。

マメゾウムシの増殖試験でも成虫の世代が重ならないとき、増殖曲線が滑らかなシグモイド曲線からはずれ、振動を始めカオス現象を示すことが知られており、メイの差分方程式はこれをよく表現しているとされている。

著者はプロジェクトで発生するカオス現象とメ



図 1 建設工事の作業員動員量の経時変化

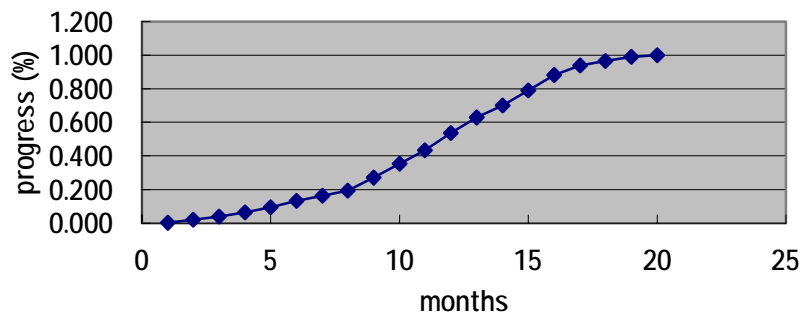


図 2 建設工事の進捗度

イの差分方程式に何らかの関連があるのではないかと率直な疑問を持った。そこでロジスティックモデル適用することで非常に簡単なプロジェクト模擬モデル式を作った。このプロジェクト模擬モデル式を差分方程式にして数値実験を行い、これもメイの差分方程式と同じくカオス現象を示すことを確認した。

本論文では、プロジェクトで発生する現実のカオス様現象とプロジェクト模擬モデル差分方程式との関連を考察する。

## 2. ロジスティックモデル

ロジスティックモデルは1838年にベルギーの数学者ピエール・ベルハルスト (Pierre Verhulst) によってマルサスの人口論で提示された等比級数的人口増殖モデルの制限のない増殖を解決するために考案された。生物群の増殖速度は生物の数が少ない時はその個体数 $N$ に比例して増加する。その初期増殖率は $r_0$ とする。しかしその数が環境が養える最大数 $K$ に近づくと資源の取り合いで増殖率は減速し、ついに成長はゼロになることを簡単な数式で表記したものである。増殖率 $r$ は次式で記述できる。

$$r = r_0 (1 - N/K) \quad (1)$$

増殖速度は増殖率 $r$ と個体数 $N$ の積として記述できる。これがロジスティック・モデルといわれるものである。

$$dN/dt = r N \quad (2)$$

進捗度 $f=N/K$ と定義すると、増殖率 $r$ は次の式に変換できる。

$$r = r_0 (1 - f) \quad (3)$$

ロジスティックモデルは下記の式に変換できる。

$$dN/dt = r_0 K f (1 - f) \quad (4)$$

または

$$df/dt = r_0 f (1 - f) \quad (5)$$

なお、この式は解析的に解くことが出来る。

$f_0 < 1$ では、 $f$ はS字状に増加し、1に収束する。これはロジスティック曲線とよばれ、環境収容力 $K$ 以下の個体数から飼育を始めれば個体数がはじめは指数関数的に増加するが、環境収容力に近づくに従い増殖速度は鈍化することを表している。

$f_0 > 1$ では、 $f$ は指数関数的に減少し、1に収束する。これは環境収容力以上の個体数から飼育を開始すれば飢餓により個体数の急激な減少が生じることを表している。

時間単位を1ヶ月、 $r_0=0.45$ 、初期進捗度  $f_0=0.001$  のとき、進捗度の変化率 (微分値)  $df/dt$  は図3の2番の左右対称のベル型曲線、進捗度 $f$ は1番のロジスティック曲線を描き、34ヶ月で  $f=1$ となる。進捗度の変化率の対数  $\ln(10000 \cdot df/dt)$  は3番の山の斜面が直線となる山形曲線となる。変化率の対数の独特の山形曲線は1992年にナキセノビッチ<sup>[3]</sup>が一次エネルギーの世代交代サイクルを記述するために利用した。

## 3. ロジスティックモデルにおけるカオス現象

ロジスティックモデルは時間が連続的に扱われている。同じ式の形であるが、時間を離散的にすると下式のような差分方程式が得られる。

$$f_{t+1} = f_t + r_0 f_t (1 - f_t) \quad (6)$$

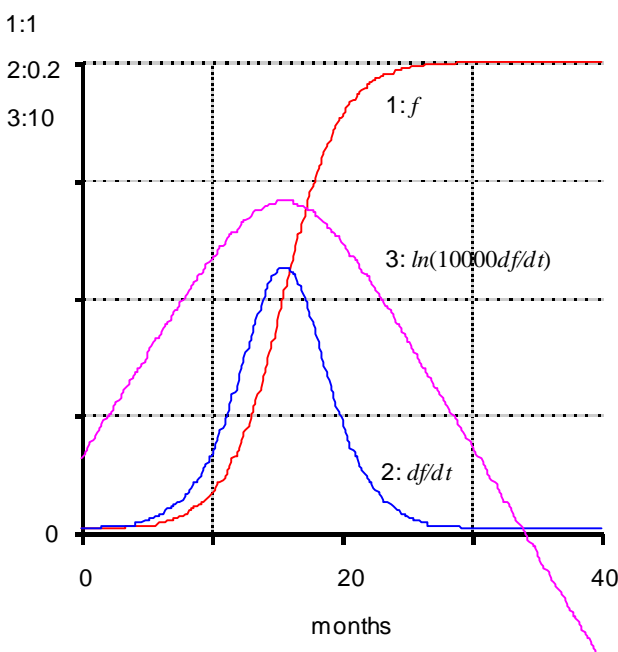


図3 ロジスティック曲線

<sup>1</sup> 作図の便宜上、 $df/dt$  を1万倍とした

この式は $0 < f_0 < 1$ の時， $1 < r_0 < 3$ で収束， $3 < r_0 < 4$ で2点，4点，8点リミットサイクルと順次分岐し，カオスに至る．図4に  $r_0=2.5$ で収束するケースを，図5に $r_0=3.5$ で4点リミットサイクルとなるケースを示す．

1941年，京都大学農学部昆虫学者，内田俊郎氏が豆につくマメゾウムシの増殖を観察して成虫の世代が重ならない飼育条件のとき，5～10世代の間で成虫の個体数に振動が発生し，徐々に振動が減衰することを発見した．

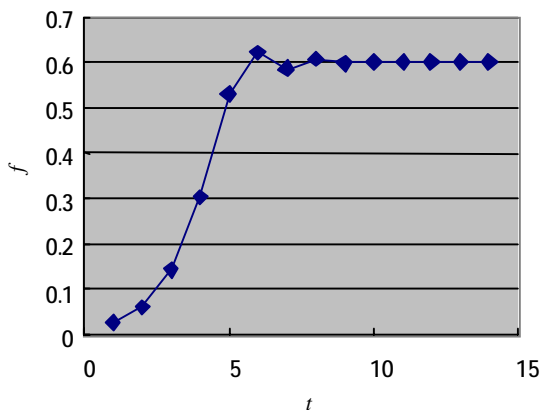


図4  $r_0=2.5$ で収束するケース

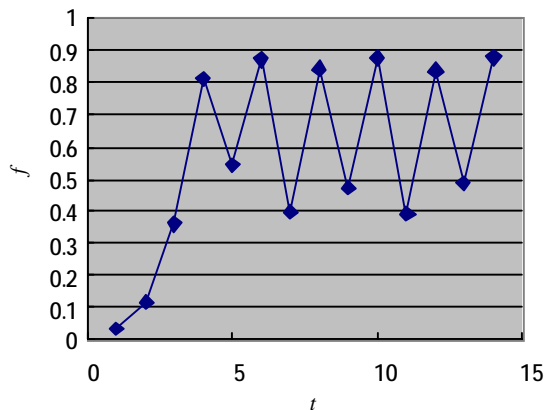


図5  $r_0=3.5$ の4点リミットサイクル

ロジスティック曲線は個体群が常にどの時間でも子を産んで，親と子が共存しているときのみ成立する．世代間の相互間コミュニケーションの遅れが無いことを示唆している．

1974年サイエンティフィックアメリカンに発表されたロバート・メイの数値実験に使われた式は

ロジスティックモデルを差分方程式表示した式であり，マメゾウムシのカオス現象をよく記述している．この式は後に数学者リーとヨークにより理論的に解明され，その後のカオス研究のきっかけを作った有名な式である．

#### 4．プロジェクト模擬モデルの提案

生態系と同じく，プロジェクトでも，人，物，金などの資源（リソース）には制限がある．資源の制約下での活動は必然的にロジスティック・モデルに似た経過をたどるため，進捗度変化率は山形になる．しかしその山形は左右対称ではなく，山の中心が後半にずれた非対称の山形になる．

ロジスティック・モデルの前提となっている微生物の増殖はどの微生物にとっても希薄になるとはいえ資源の均等な利用が保証されている．しかしプロジェクトの場合は資源は均一利用可能ではない．プロジェクトではある人が分担する仕事は他の人の仕事の成果（成果物，デリバラブル）にたって，初めて開始できる性質がある．ワークフローを無視した消費は出来ない．すなわち資源の分配は特定の構造をもって行われる．

この構造はプロジェクトによって異なり，一般化はできないが，ロジスティックモデルの最小限の変更でプロジェクトの進捗度の概略の記述ができないか試みてみた．ロジスティックモデルの増殖率 $r$ は(3)式であった． $(1-f)$ が資源の枯渇状況を記述してフィードバック回路を形成している．

ここに着目し， $f$ を $n$ 乗して任意の $n$ でテストしてみることにした．従ってプロジェクト模擬モデルは次式となる．

$$r = r_0 (1-f^n) \tag{7}$$

$n = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ の4ケースについて試算した． $n=1$ 以外解析解は無いので数値積分した．

いずれのケースも時間単位を1ヶ月とし，初期進捗度 $f_0=0.001$ ，34ヶ月または17ヶ月で，ほぼ $f=1^2$ になるように初期増殖率 $r_0$ を決めた．（表-1参照）

<sup>2</sup> 厳密には 34 ヶ月で  $\ln(10000df/dt)=0$

表1 初期増殖率  $r_0$

n	34 months	17 months
0.5	0.715	1.430
1	0.450	0.900
2	0.321	0.642
3	0.280	0.560

図6にプロジェクト模擬モデルの進捗度の経時変化  $f$  を示す。  $n=1$  がロジスティックモデルそのもので、  $n=2$  がプロジェクトの実態に最も近い。

図7にプロジェクト模擬モデルの進捗度の変化率  $df/dt$  を示す。 実際のプロジェクトでは30ヶ月に渡るプロジェクトで一ヶ月当たりの変化率が10%を超えることはない。 この簡易モデルの限界であろう。

図8にプロジェクト模擬モデルの進捗度の変化率の自然対数  $\ln(10000df/dt)$  を示す。 図9にプロジェクト模擬モデルの進捗度に対応する増殖率の変化を示す。

増殖率の経時変化は図9とはかなり異なる。 図10にその増殖率の経時変化を示す。

図11に進捗度に対応する進捗度の変化率を示す。 この図はフェーズ・プロットと呼ばれる。  $f=0$  で勾配が正であるため正のフィードバックが働き、  $f=0$  は不安定点となる。  $f=1$  では勾配が負であるため、負のフィードバックが働き、  $f=1$  は安定点となる。 これからプロジェクト模擬モデルは安定的であり、  $f=1$  に収束することがわかる。

### 5. プロジェクト模擬モデルのカオス現象

プロジェクト模擬モデルはロジスティックモデルと同じように時間の連続性を前提にしているが、この時間を離散的にすると下式のようになる。

$$f_{t+1} = f_t + r_0 f_t (1-f_t^n) \quad (8)$$

$f_0=0.01$  の時、  $n=2$ 、  $r_0=1.5$  では収束し、  $n=2$ 、  $r_0=2.5$  でカオス状態になることが確かめられた。

図12に  $n=2$ 、  $r_0=1.5$  で収束ケース、 図13と図14に  $n=2$ 、  $r_0=2.5$  でカオスになるケースを示す。

初期増殖率  $r_0$  を0.05ずつ変え、  $f$  を200世代に渡

り計算し、安定した126世代から200世代のおよそ2,300点をプロットし、収束、リミットサイクル、カオスと変化する周期倍分岐図を作成した。 図15は  $n=2$  の場合の周期倍分岐図である。 本図を各  $n$  に関し作成し、  $n$  を変数とする収束領域、リミット

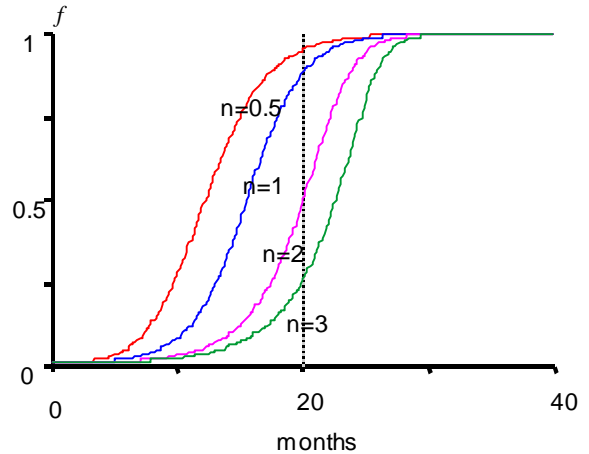


図6 進捗度の経時変化  $f$  (34 months)

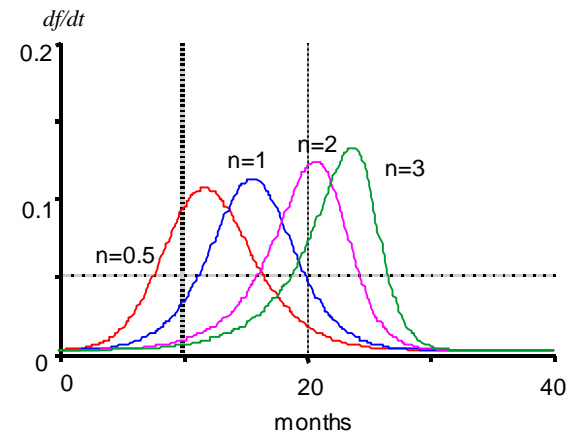


図7 進捗度の変化率  $df/dt$  (34 months)

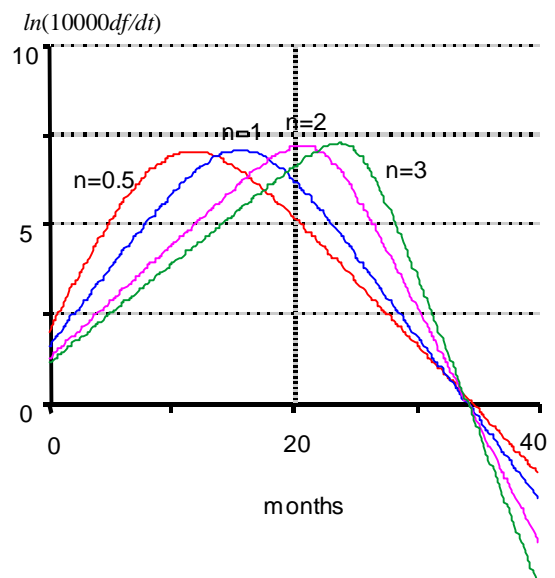


図8 進捗度の変化率の対数(34 months)

サイクル、カオス領域を調べた。(図16)

$n$ が増す程、すなわち活動のピークが後半に来る程収束領域が狭くなることがわかる。 $r_0 < 1$ およ

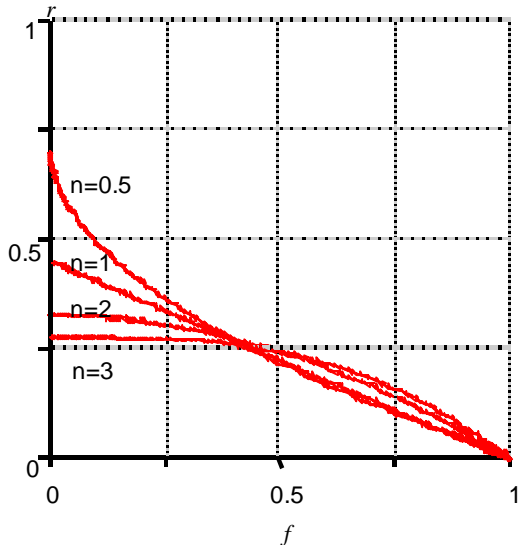


図9 進捗度に対する増殖率の変化(34 months)

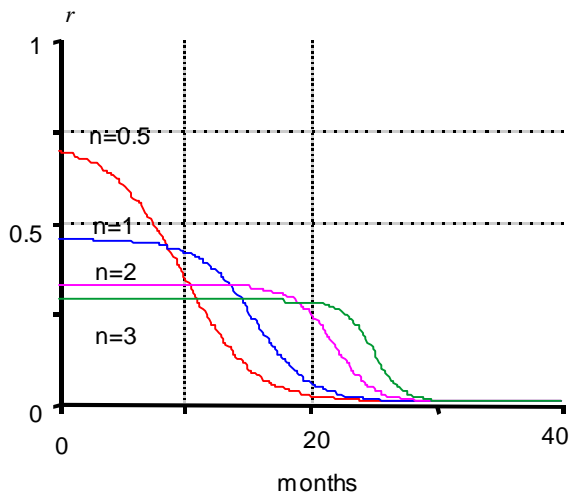


図10 増殖率の経時変化(34 months)

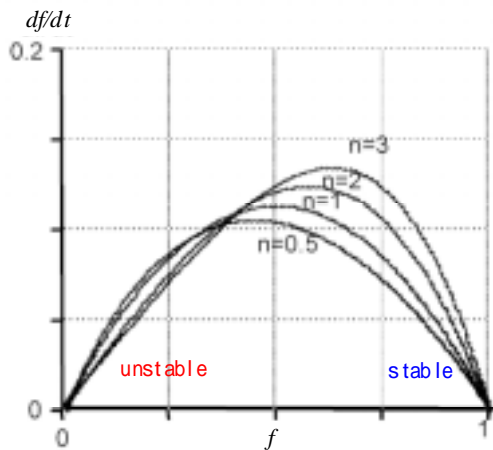


図11 フェーズ・プロット  
(進捗度に対応する進捗度変化率)

びカオスの上限では、 $f < 0$ となり発散し意味をなさない。

## 6. 考察

プロジェクト模擬モデルも差分方程式にするとカオス現象を示し、 $r_0$ が大きい程、又 $n$ が大きい程、すなわち活動のピークが後半に来る程、不安定になることがわかった。

ファストトラック・プロジェクトでカオス現象が生じるのは、後工程は前工程の成果にたつというワークフローの因果関係を無視せざるを得ないことや言葉の定義などインターフェース確認を含むコミュニケーション遅れ等にあると考えられる。

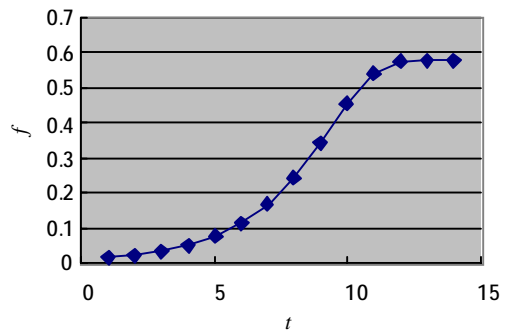


図12 収束ケース ( $n=2, f_0=0.01, r_0=1.5$ )

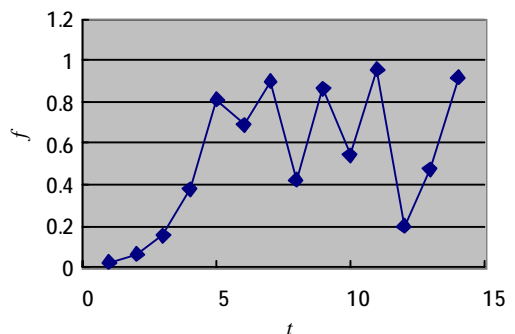


図13 カオスケース ( $n=2, f_0=0.01, r_0=2.5$ )

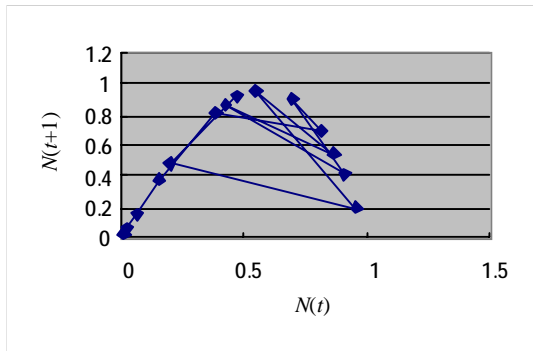


図 14 カオスケース ( $n=2, f_0=0.01, r_0=2.5$ )

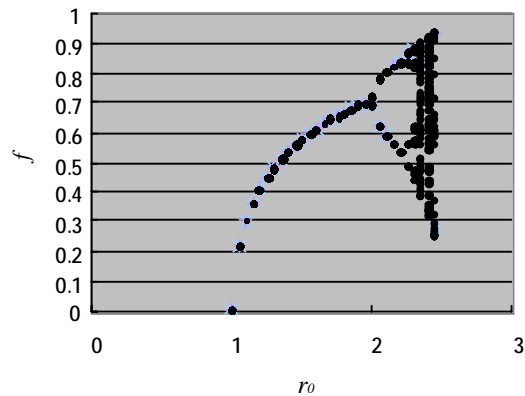


図 15  $n=2$  の周期倍分岐図

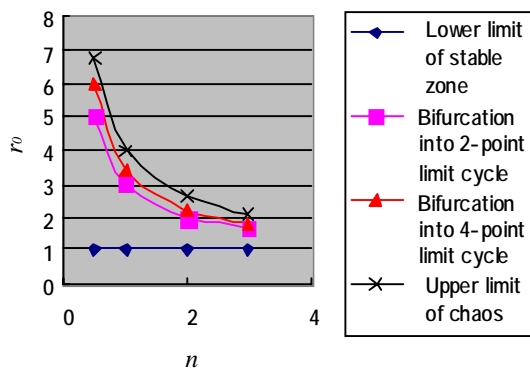


図 16 リミットサイクルとカオス領域  $f_0=0.01$

## 謝辞

本論文の構想は横浜市立大学佐々木圭吾助教授、名古屋商科大学小松昭英教授の 2000 年総合講座の講演準備が端緒となった。CDM の杉谷照雄君には査読で厳しい指摘を頂いた。そもそも著者がカオスに関する興味を持つ端緒を作り、最終原稿のブラッシュアップをしてくれたのは千葉工業大学の越島一郎教授である。皆様に感謝します。

## 記号の説明

- f: 進捗度 ( $f=N/K$ )
- $f_t$ : 時間  $t$  における進捗度
- $f_0$ : 時間  $t=0$  における初期進捗度
- K: 資源の制約により環境が養える最大個体数 (環境収容力, carrying capacity)
- N: 個体数
- r: 個体数が  $N$  の時の増殖率
- $r_0$ : 増殖開始時の初期増殖率 (この時の個体数は  $N_0$ )

## 参考文献

- [1] バージニア工科大昆虫科シャロフ教授のサイト <http://www.ento.vt.edu/~sharov/PopEcol/>
- [2] 山口昌哉著「カオスとフラクタル」講談社刊, 1986年初版, 1989年第9刷, ISBN4-06-132652-X
- [3] Nebojsa Nakicenovic "Energy Strategies for Mitigating Global Change" IIASA Jan. 1992.