１．６　スカラー及びベクトルの経路依存積分（解答）

１．６．1

$$\oint \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \oint x dx + \oint y dy + \oint z dz \quad ,$$

上式右辺の各項は、積分の始点と終点が一致するため、すべてゼロとなる。
よって$\oint \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = 0$ ．　　　◆

１．６．2

（a）

$$\int_C \mathbf{V}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1}(2xy)dx + \int_{C_2}\left(x^2 - y^2\right)dy$$

$$= \left[x^2 y\right]_{C_1} + \left[x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right]_{C_2}$$

$$= {x_o}^2 y_o - \frac{1}{3}{y_o}^3 \quad .$$

（b）

$(0,0)$と(x_o, y_o)を結ぶ直線をN等分し、下記のような階段状の積分経路$\sum \Delta c$を設ける。

$$\Delta c_{1n}\ :\ \left((n-1)\frac{x_o}{N}, (n-1)\frac{y_o}{N}\right) \to \left(n\frac{x_o}{N}, (n-1)\frac{y_o}{N}\right) \qquad \cdots ①\ ,$$

$$\Delta c_{2n}\ :\ \left(n\frac{x_o}{N}, (n-1)\frac{y_o}{N}\right) \to \left(n\frac{x_o}{N},\quad n\frac{y_o}{N}\right) \qquad \cdots ②\ ,$$

ただし$n = 1, 2, \cdots, N$

経路$\sum \Delta c$に沿う関数$\mathbf{V}(\mathbf{r})$の積分は、次式で表される。

$$\int_{\Sigma\Delta c} \mathbf{V}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \sum_{n=1}^{N}\left\{\int_{\Delta c_{1n}}(2xy)dx + \int_{\Delta c_{2n}}\left(x^2 - y^2\right)dy\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\left\{\left[x^2 y\right]_{\Delta c_{1n}} + \left[x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right]_{\Delta c_{2n}}\right\} \qquad \cdots ③$$

ここで$\left[x^2 y\right]_{\Delta c_{1n}}$に①を代入して整理すると

$$\left[x^2 y\right]_{\Delta c_{1n}} = \frac{{x_o}^2 y_o}{N^3}\left(2n^2 - 3n + 1\right)$$

同様に、$\left[x^2y-\dfrac{1}{3}y^3\right]_{\Delta c_{2n}}$ に②を代入して整理すると

$$\left[x^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{\Delta c_{2n}}=\frac{{x_o}^2y_o}{N^3}n^2-\frac{1}{3}\frac{{y_o}^3}{N^3}\left(3n^2-3n+1\right)$$

よって③は

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma\Delta c}\mathbf{V}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}&=\left({x_o}^2y_o-\frac{1}{3}{y_o}^3\right)\cdot\frac{1}{N^3}\sum_{n=1}^{N}\left(3n^2-3n+1\right)\\&=\left({x_o}^2y_o-\frac{1}{3}{y_o}^3\right)\cdot\frac{1}{N^3}\left\{N(N+1)\left(N+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}N(N+1)+N\right\}\end{aligned}$$

となる。$N\to\infty$ とすれば、題記の積分経路 c に近づく。その結果は

$$\begin{aligned}\int_c\mathbf{V}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}&=\lim_{N\to\infty}\int_{\Sigma\Delta c}\mathbf{V}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}\\&=\left({x_o}^2y_o-\frac{1}{3}{y_o}^3\right)\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^3}\left\{N(N+1)\left(N+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}N(N+1)+N\right\}\\&={x_o}^2y_o-\frac{1}{3}{y_o}^3\end{aligned}$$

となり、（a）の結果と一致する。　　　◆

1．6．3

（a）円筒状の積分面を４等分し、まず「$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$」の積分面 S_1 について考える。積分面上で $d\boldsymbol{\sigma}$ の z 軸成分は常にゼロだから、

$$\int_{S_1}x^2y^2z^2d\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{i}\int_{S_1}x^2y^2z^2d\sigma_x+\mathbf{j}\int_{S_1}x^2y^2z^2d\sigma_y \qquad \cdots ①$$

となる。①式右辺の第１項について

$$\mathbf{i}\int_{S_1}x^2y^2z^2d\sigma_x=\mathbf{i}\int_0^1\left(y^2-y^4\right)dy\int_0^1z^2dz=\frac{2}{45}\mathbf{i}\quad ,$$

積分方向に注意して、①式右辺の第２項は

$$\mathbf{j}\int_{S_1}x^2y^2z^2d\sigma_y=\mathbf{j}\int_1^0\left(x^2-x^4\right)dx\int_0^1z^2dz=-\frac{2}{45}\mathbf{j}\quad ,$$

よって①式は

$$\int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{45}(\mathbf{i}-\mathbf{j}) \qquad \cdots ①'$$

となる。

「$x \leqq 0$ かつ $y \geqq 0$」の積分面 S_2 について同様の計算を行う。

$$\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{i}\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\sigma_x + \mathbf{j}\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\sigma_y \quad , \qquad \cdots ②$$

$$-\mathbf{i}\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\sigma_x = -\mathbf{i}\int_1^0 \left(y^2 - y^4\right)dy \int_0^1 z^2 dz = \frac{2}{45}\mathbf{i} \quad ,$$

$$\mathbf{j}\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\sigma_y = \mathbf{j}\int_0^{-1} \left(x^2 - x^4\right)dx \int_0^1 z^2 dz = -\frac{2}{45}\mathbf{j} \quad ,$$

※ $$\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{45}(\mathbf{i}-\mathbf{j}) \qquad \cdots ②'$$

「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$」の積分面 S_3 について

$$\int_{S_3} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{i}\int_{S_3} x^2 y^2 z^2 d\sigma_x - \mathbf{j}\int_{S_3} x^2 y^2 z^2 d\sigma_y \quad , \qquad \cdots ③$$

$$-\mathbf{i}\int_{S_3} x^2 y^2 z^2 d\sigma_x = -\mathbf{i}\int_0^{-1} \left(y^2 - y^4\right)dy \int_0^1 z^2 dz = \frac{2}{45}\mathbf{i} \quad ,$$

$$-\mathbf{j}\int_{S_3} x^2 y^2 z^2 d\sigma_y = -\mathbf{j}\int_{-1}^0 \left(x^2 - x^4\right)dx \int_0^1 z^2 dz = -\frac{2}{45}\mathbf{j} \quad ,$$

※ $$\int_{S_3} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{45}(\mathbf{i}-\mathbf{j}) \qquad \cdots ③'$$

「$x \geqq 0$ かつ $y \leqq 0$」の積分面 S_4 について

$$\int_{S_4} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \int_{S_4} x^2 y^2 z^2 d\sigma_x - \mathbf{j}\int_{S_4} x^2 y^2 z^2 d\sigma_y \quad , \qquad \cdots ④$$

$$\mathbf{i}\int_{S_4} x^2 y^2 z^2 d\sigma_x = \mathbf{i}\int_{-1}^0 \left(y^2 - y^4\right)dy \int_0^1 z^2 dz = \frac{2}{45}\mathbf{i} \quad ,$$

$$-\mathbf{j}\int_{S_4} x^2 y^2 z^2 d\sigma_y = -\mathbf{j}\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right)dx \int_0^1 z^2 dz = -\frac{2}{45}\mathbf{j} \quad ,$$

※ $$\int_{S_4} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{45}(\mathbf{i}-\mathbf{j}) \qquad \cdots ④'$$

よって題記の積分は

$$\int_S x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} + \int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} + \int_{S_3} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} + \int_{S_4} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma}$$

$$= \frac{8}{45}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$$

となる。

（b）積分面である単位球面を８等分し、まず「$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$」の積分面 S_1 について考える。

$$\int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}\int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\sigma_x + \mathbf{j}\int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\sigma_y + \mathbf{k}\int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\sigma_z \qquad \cdots ①$$

①式右辺の第１項について、積分変数の置換を

$$\begin{cases} dydz = \rho d\theta d\rho \\ y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$$

と行い、以下の結果を得る。

$$\mathbf{i}\int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\sigma_x = \mathbf{i}\int_{S_1} y^2 z^2 \left(1 - y^2 - z^2\right) dydz$$

$$= \mathbf{i}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^1 \left(\rho^5 - \rho^7\right) d\rho = \frac{\pi}{384}\mathbf{i}$$

①式右辺の第２，３項についても同様に計算する。

$$\mathbf{j}\int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\sigma_y = \mathbf{j}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^1 \left(\rho^5 - \rho^7\right) d\rho = \frac{\pi}{384}\mathbf{j} \ ,$$

$$\mathbf{k}\int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\sigma_z = \mathbf{k}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^1 \left(\rho^5 - \rho^7\right) d\rho = \frac{\pi}{384}\mathbf{k} \ ,$$

よって①式は

$$\int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\pi}{384}\left(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \qquad \cdots ①'$$

となる。

「$x \leqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$」の積分面 S_2 について同様の計算を行う。

$$\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{i}\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\sigma_x + \mathbf{j}\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\sigma_y + \mathbf{k}\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\sigma_z \ , \qquad \cdots ②$$

$$-\mathbf{i}\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\sigma_x = -\mathbf{i}\int_{\pi/2}^{0} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^1 \left(\rho^5 - \rho^7\right) d\rho = \frac{\pi}{384}\mathbf{i} \ ,$$

$$\mathbf{j}\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\sigma_y = \mathbf{j}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^1 \left(\rho^5 - \rho^7\right) d\rho = \frac{\pi}{384}\mathbf{j} \ ,$$

$$\mathbf{k}\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\sigma_z = \mathbf{k}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^1 \left(\rho^5 - \rho^7\right) d\rho = \frac{\pi}{384}\mathbf{k} \ ,$$

※ $$\int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\pi}{384}\left(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \qquad \cdots ②'$$

「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$ かつ $z \geqq 0$」の積分面 S_3 に関する結果は、これまでの計算より容易に想像できる。

$$\int_{S_3} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\pi}{384}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

「$x \geqq 0$ かつ $y \leqq 0$ かつ $z \geqq 0$」の積分面 S_4 について

$$\int_{S_4} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\pi}{384}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

「$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \leqq 0$」の積分面 S_5 について

$$\int_{S_5} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\pi}{384}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

「$x \leqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \leqq 0$」の積分面 S_6 について

$$\int_{S_6} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\pi}{384}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$ かつ $z \leqq 0$」の積分面 S_7 について

$$\int_{S_7} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\pi}{384}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

「$x \geqq 0$ かつ $y \leqq 0$ かつ $z \leqq 0$」の積分面 S_8 について

$$\int_{S_8} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\pi}{384}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

よって単位球面全体にわたる積分は

$$\begin{aligned}\int_{S} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} &= \int_{S_1} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} + \int_{S_2} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} + \cdots + \int_{S_8} x^2 y^2 z^2 d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{\pi}{48}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\end{aligned}$$

となる。 ◆