１．５　ベクトル場のベクトル微分演算（問題）

1．5．1　以下の恒等式を導出せよ：

（a）　$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$　；

（b）　$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$　；

（c）　$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$　.

1．5．2　$\mathbf{A}(\mathbf{r})$が渦なし場のとき、$\mathbf{A}\times\mathbf{r}$はソレノイダルであることを証明せよ。

1．5．3　剛体が、座標原点を通る軸のまわりを一定の角速度$\vec{\omega}$で回転している。このとき剛体内のあらゆる点$\mathbf{r}$における速度$\mathbf{v}$は、方程式

$$\mathbf{v}=\vec{\omega}\times\mathbf{r}$$

で与えられることを証明せよ。また

（a）　$\mathbf{v}$はソレノイダルである　；

（b）　$\nabla\times\mathbf{v}=2\vec{\omega}$　；　そして

（c）　$\nabla(\vec{\omega}\cdot\mathbf{r})=\vec{\omega}$　.

についても証明せよ。

1．5．4　直交座標系において、反発力$\mathbf{F}=k\mathbf{e}_r/r^n$の発散を計算せよ。また$n=2$のとき、$\mathbf{r}=0$以外の場所でこの力はソレノイダルであることを証明せよ。最後に、この種の力はすべて渦なし場であることを証明せよ。

1．5．5　$\mathbf{B}(\mathbf{r})$が渦なし場であり、かつソレノイダルでもある時、定ベクトル$\mathbf{m}$に対して

$$\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{m})=\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{m})$$

となることを証明せよ。

1．5．6　直交座標を用いて$\nabla\cdot\mathbf{e}_r=2/r$および$\nabla\times\mathbf{e}_r=0$を証明せよ。