１．５　ベクトル場のベクトル微分演算

１変数 t のベクトル関数 $\mathbf{F}(t)$ は、各々が t のスカラー関数である３つの成分 $F_x(t), F_y(t), F_z(t)$ からなる。同様に多変数のベクトル関数は、各々がそれら多変数のスカラー関数である複数の成分からなる。

物理学において特に目を引くのが、位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ のベクトル関数、あるいはベクトル場である。たとえばベクトル場

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \left(V_x(x,y,z), V_y(x,y,z), V_z(x,y,z)\right)$$

は、点 $\mathbf{r}$ でのベクトル成分 $V_i(x,y,z)$ ［ただし $i = x, y, z$ ］を与える規則を、簡潔に示している。またベクトル成分の偏微分がすべて存在するとき、そのベクトル場は微分可能である。

ベクトル場の例として $\nabla\phi(\mathbf{r})$ を挙げる。ここで $\phi(\mathbf{r})$ はスカラー場である。また力の場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は、空間内のあらゆる点 $\mathbf{r}$ において作用する力 $\mathbf{F}$ を定義する。

ベクトル場のベクトル微分演算はより複雑であるが、それは演算子と、演算子の作用対象である場の両方がともにベクトル的な性質を有するからである。それゆえ２つのベクトルの積のとり方には２通りあって、それぞれスカラー積（内積）およびベクトル積（外積）とよばれている。ベクトル場のベクトル微分演算もまた２通りに分けることができ、それぞれ発散（divergence）および回転（curl あるいは rotation）とよばれている。

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ の発散は、スカラー積

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{V}(\mathbf{r}) &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y + \mathbf{k}V_z\right) \\ &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\end{aligned} \qquad (1.47)$$

として定義される。積の結果はスカラー場となる。これはスカラー微分演算子

$$\mathbf{V}(\mathbf{r})\cdot\nabla = V_x\frac{\partial}{\partial x} + V_y\frac{\partial}{\partial y} + V_z\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1.48)$$

とは別のものである。次の例題で１例を示しておく。

例題１．５．１

$$\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{r})=\mathbf{r}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)=3\mathbf{r}\,,$$

$$(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{r}=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z)=\mathbf{r}$$

$$\neq\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{r})\quad .$$

ベクトル場$\mathbf{V}(\mathbf{r})$の回転は、ベクトル積

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{V}(\mathbf{r})&=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ V_x&V_y&V_z\end{vmatrix}\\&=\mathbf{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\qquad（1．49）\\&=\sum_{m,n,l}\varepsilon_{mnl}\mathbf{e}_m\frac{\partial}{\partial x_n}V_l\end{aligned}$$

として定義される。積の結果はベクトル場であり、ベクトル微分演算子

$$\mathbf{V}(\mathbf{r})\times\nabla=\sum_{m,n,l}\varepsilon_{mnl}\mathbf{e}_mV_n\frac{\partial}{\partial x_l}$$

とは異なる。

例題１．５．２

$\mathbf{e}_1\times(\nabla\times\mathbf{r})=0$である。なぜなら

$$\nabla\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x&y&z\end{vmatrix}=0\quad .$$

しかしながら、

$$(\mathbf{e}_1\times\nabla)\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 1&0&0\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\end{vmatrix}\times\mathbf{r}=\left(-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y}\right)\times\mathbf{r}$$

$$=-2\mathbf{i}\neq\mathbf{e}_1\times(\nabla\times\mathbf{r})\quad .$$

この違いは、両方の微分演算とベクトル積が、数式中での積の順序に結果を負うという事実に起因する。

物理学におけるベクトル場のうち最も興味深いものとして、空間内のあらゆる場所でベクトル微分演算の結果がゼロになる、という特性をもつものがある。そのような特殊な場には、特別な名前が与えられている：

$\nabla\cdot\mathbf{V}(\mathbf{r})=0$ のとき、$\mathbf{V}$ はソレノイダル（あるいは湧き出しのない場）とよばれる。
$\nabla\times\mathbf{V}(\mathbf{r})=0$ のとき、$\mathbf{V}$ は渦なし場とよばれる。

例題 1．5．3　あらゆるスカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ の勾配は渦なし場であること、また、あらゆるベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ の回転はソレノイダルであることを証明せよ。

$$\nabla\times(\nabla\phi)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\end{vmatrix}\phi(x,y,z)=0 \qquad (1．50)$$

行列式中、２つの行が同じ内容のため、上式はゼロとなる。別の表現では

$$\nabla\times(\nabla\phi)=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\phi(x,y,z)=0 \quad ,$$

j,k に関して ε_{ijk} は反対称であり、一方 $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}$ は対称である。それゆえ総和の各項は、必ず他の項と打ち消しあってゼロになる：

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}+\varepsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}=0 \quad .$$

同様に

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{V})&=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\times\mathbf{V})_i\\ &=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}V_k\right)=0\end{aligned} \qquad (1．51)$$

となるが、これは ε_{ijk} が i,j に関して反対称だからである。これらの結果の物理的解釈については、次の２節にわたり説明を行う。

最後に、スカラー演算子∇^2とベクトル演算子∇の両方とも、ベクトル場$\mathbf{V}(\mathbf{r})$に作用可能であることを示しておく：

$$\nabla^2 \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(\nabla^2 V_x) + \mathbf{j}(\nabla^2 V_y) + \mathbf{k}(\nabla^2 V_z) \qquad (1.\ 52)$$

これは明らかにベクトル場である。一方

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{V}(\mathbf{r}) &= \mathbf{i}(\nabla V_x) + \mathbf{j}(\nabla V_y) + \mathbf{k}(\nabla V_z) \\ &= \mathbf{i}\left(\mathbf{i}\frac{\partial V_x}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V_x}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ &\quad + \mathbf{j}\left(\mathbf{i}\frac{\partial V_y}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V_y}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ &\quad + \mathbf{k}\left(\mathbf{i}\frac{\partial V_z}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V_z}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \qquad (1.\ 53)\end{aligned}$$

はより複雑な数学的実体であり、ダイアディク場として知られている。（ダイアッドあるいはダイアディクとは、ベクトル同士を双線形的に組み合せたものである。３次元空間においてダイアッドは９つの成分をもち、それは９つの単位ダイアッド$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$と関係づけられる。）

1．5．1　ベクトル微分演算子の適用

ベクトル微分演算子（Vector Differential Operators，VDO）の取り扱いにおいては、それらが微分演算子でありベクトルでもある、ということを覚えておく事が大切である。たとえば、微分演算においては因子の並び順が重要である：

$$f\frac{\partial}{\partial x}(gh) = fh\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) + fg\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \neq \frac{\partial}{\partial x}(fgh) \qquad (1.\ 54)$$

ベクトル積の計算で、行列式による面倒な表記法を用いてベクトル成分を書き記すことは、おそらく実に楽しくないであろう。もっとも簡単なケースを除けば、たいてい置換記号を使うほうがはるかに便利である。

例題１．５．４

$\phi(\mathbf{r})$をスカラー場、$\mathbf{V}(\mathbf{r})$をベクトル場とする。このとき次式を証明せよ。

$$\nabla \times (\phi \mathbf{V}) = \phi(\nabla \times \mathbf{V}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{V}$$

方程式の両辺がともにベクトル場であることに、まず着目せよ。

方法１.

$$\nabla\times(\phi\mathbf{V})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ \phi V_x & \phi V_y & \phi V_z\end{vmatrix}=\phi\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial\phi/\partial x & \partial\phi/\partial y & \partial\phi/\partial z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}$$

　ここで最後の変形は、恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi V_y\right)=\phi\frac{\partial V_y}{\partial x}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)V_y$$

の助けを借りてなされる。

方法２.

$$\begin{aligned}\nabla\times(\phi\mathbf{V})&=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi V_k\right)\\ &=\phi\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}V_k+\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)V_k \qquad （1.\ 55）\\ &=\phi(\nabla\times\mathbf{V})+(\nabla\phi)\times\mathbf{V}\end{aligned}$$

　場へ作用するベクトル微分演算を含む、他の有用な関係式を挙げておく。

$$\nabla\cdot(\phi\mathbf{V})=\phi(\nabla\cdot\mathbf{V})+(\nabla\phi)\cdot\mathbf{V} \qquad （1.\ 56）$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) \qquad （1.\ 57）$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A} \qquad （1.\ 58）$$

例題 1．5．5

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(r)&=\nabla\cdot\nabla f(r)=\nabla\cdot\left(\mathbf{e}_r\frac{df(r)}{dr}\right)\\ &=\mathbf{e}_r\cdot\left(\nabla\frac{df(r)}{dr}\right)+\frac{df(r)}{dr}\nabla\cdot\mathbf{e}_r\end{aligned}$$

　式（1．44）によれば

$$\nabla\left(\frac{df}{dr}\right)=\frac{d^2f}{dr^2}\mathbf{e}_r$$

だから、第１項は d^2f/dr^2 となる。第２項については、以下の計算を行う。

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{e}_r&=\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)=\frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{r}+\mathbf{r}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\\ &=\frac{3}{r}+\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_r\left(-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{2}{r}\end{aligned}$$

したがって

$$\nabla^2 f(r) = \frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} f(r) \quad . \qquad （1．59）$$

例題１．５．６

$\mathbf{B}(\mathbf{r})$ および $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ がベクトル場のとき次式を証明せよ。

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \left[\mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{C}\right] \qquad （1．60）$$

方法１.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k \quad \leftarrow \text{式（1．34）を適用} \\
&= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{m,n} \varepsilon_{kmn} B_m C_n \right) \\
&= \sum_{i,j,m,n} \left(\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \right) \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (B_m C_n) \\
&= \sum_{i,j,m,n} \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \right) \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (B_m C_n) \quad \leftarrow \text{式(1.32)と(1.36a)を適用} \\
&= \sum_{i,j} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(B_i C_j - B_j C_i \right) \\
&= \sum_{i,j} \left(\mathbf{e}_i B_i \frac{\partial C_j}{\partial x_j} + C_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i C_i \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - B_j \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \right) \qquad （1．61）
\end{aligned}$$

これらの４項は、式（1．60）の４項と正確に対応する。このように置換記号を用いると、証明をとても簡潔に、かつ整然としたやり方で進められることを覚えておこう。

方法２.

式（1．61）の導出で行われた多量の計算は、式（1．28）の BAC 則に既に含まれている。ただ１つの新しい特徴は、$\mathbf{A}$ がここでは、ベクトル場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ および $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ の左側にあるベクトル微分演算子 ∇ に置き換えられる点である。そのことと微分演算の関係式（1．54）より、ここで次の置換

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} \quad &\rightarrow \quad \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B} \\
-\mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C} \quad &\rightarrow \quad -\mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{C}
\end{aligned}$$

が行われる。すなわち BAC 則の各項より２項、派生する。こうして式（1．60）を得る。この手続きを、BAC 則の演算子形式とよぶ。