１．４　スカラー場のベクトル微分演算（解答）

１．４．１

ベクトルを座標成分で表示して計算を行う。

$$\mathbf{A}=\mathbf{r}\times\nabla\phi=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$=\left(y\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(z\frac{\partial\phi}{\partial x}-x\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(x\frac{\partial\phi}{\partial y}-y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{k}\quad ,$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}=\left\{\left(y\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(z\frac{\partial\phi}{\partial x}-x\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(x\frac{\partial\phi}{\partial y}-y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{k}\right\}\cdot(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$$

$$=x\left(y\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+y\left(z\frac{\partial\phi}{\partial x}-x\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+z\left(x\frac{\partial\phi}{\partial y}-y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=0\quad ,$$

$$\mathbf{A}\cdot\nabla\phi=\left\{\left(y\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(z\frac{\partial\phi}{\partial x}-x\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(x\frac{\partial\phi}{\partial y}-y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{k}\right\}\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(y\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(z\frac{\partial\phi}{\partial x}-x\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial z}\left(x\frac{\partial\phi}{\partial y}-y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=0\quad .\qquad\blacklozenge$$

１．４．２

（ａ）$\nabla(\ln r)$について：

$$\ln r=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right),$$

$$\nabla\ln r=\frac{1}{2}\nabla\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k})$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

（ｂ）$\nabla\left(3z^2-r^2\right)$について：

$$\nabla\left(3z^2-r^2\right)=3\nabla z^2-\nabla\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$=3\cdot 2z\mathbf{k}-(2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k})$$

$$=2(3z\mathbf{k}-\mathbf{r})$$

（c）$\nabla^2(\ln r)$について：

$$\nabla^2 \ln r = \frac{1}{2}\nabla^2 \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)-4x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)-4y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)-4z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{r^2}$$

（d）$\nabla^2\left(3z^2-r^2\right)$について：

$$\nabla^2\left(3z^2-r^2\right) = 3\nabla^2 z^2 - \nabla^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$= 3\frac{\partial^2}{\partial z^2}z^2 - \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}y^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}z^2\right\} \quad \blacklozenge$$

$$= 3\cdot 2 - \{2+2+2\} = 0$$

1．4．3

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -(x-1)\left[(x-1)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}} - (x+1)\left[(x+1)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}} ,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -y\left[(x-1)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}} - y\left[(x+1)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}} ,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -z\left[(x-1)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}} - z\left[(x+1)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}} ,$$

ゆえに

$$\nabla\phi = -\left[(x-1)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[(x-1)\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\right]$$

$$-\left[(x+1)^2+y^2+z^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[(x+1)\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\right] .$$

上式に座標値$(x,y,z)=(1,1,1)$を代入して整理すると、次式を得る。

$$\nabla\phi(1,1,1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\mathbf{j}+\mathbf{k}+\frac{1}{3\sqrt{3}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\right\} \quad \blacklozenge$$

1．4．4

　$\nabla\phi\times\nabla\psi$ がどの場所でも０であれば、$\nabla\phi$ と $\nabla\psi$ はどの場所でも平行となる。言いかえれば、ϕ と ψ の力線はどの場所でも平行となる。力線は等位面とつねに直交するから、ϕ と ψ の等位面もまた、どの場所でも平行となる。　◆

1．4．5

　２つのスカラー場 ψ と ϕ、およびその勾配を考える。

$$\psi = x^2 + y^2 + z^2 \quad ① \, , \qquad \nabla\psi = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \quad ② \, ,$$

$$\phi = x + y + z \quad ③ \, , \qquad \nabla\phi = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad ④ \, .$$

一方、座標原点に中心をもつ半径 $\sqrt{3}$ の球面の方程式は、次式で表される。

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad ⑤$$

①式より、⑤がスカラー場 ψ の等位面（$\psi = 3 = const.$）を表していると分かる。この等位面上の点 $(1,1,1)$ における法線ベクトルは、②より

$$\nabla\psi(1,1,1) = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad ⑥$$

となる。

　次に、方程式 $x + y + z = 3$ について考える。

$$x + y + z = 3 \quad ⑦$$

③式より、⑦がスカラー場 ϕ の等位面（$\phi = 3 = const.$）を表していると分かる。また④式より、等位面 $\phi = 3$ を含むすべての点で法線ベクトル $\nabla\phi$ が一定だと分かる。それゆえ⑦によって表される図形（等位面 $\phi = 3$）は平面となる。また x, y, z に各々１を代入すれば、⑦が点 $(1,1,1)$ を通ることも分かる。

　以上のことより、球面の方程式⑤と平面の方程式⑦は同じ点 $(1,1,1)$ を通り、かつその点における法線ベクトルは平行である事が分かる。言いかえれば、球面⑤の点 $(1,1,1)$ における接平面は、⑦で表される。　◆

1．4．6

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad ①$$

$$2x + 2y + z^2 = 4 \quad ②$$

　①で表される図形は、座標原点を中心とした半径 $\sqrt{3}$ の球面である。次に、②で表される図形を考える。

A． xy 平面との交線：

②で $z=0$ とおいて

$$y=2-x$$

を得る。この式で表される直線は、曲面②と xy 平面の交線である。

B． yz 平面との交線：

②で $x=0$ とおいて

$$y=2-\frac{1}{2}z^2$$

を得る。この式で表される曲線は、曲面②と yz 平面の交線である。

C． zx 平面との交線：

②で $y=0$ とおいて

$$x=2-\frac{1}{2}z^2$$

を得る。この式で表される曲線は、曲面②と zx 平面の交線である。

A.～C.より、②で表される図形は以下のようになる。

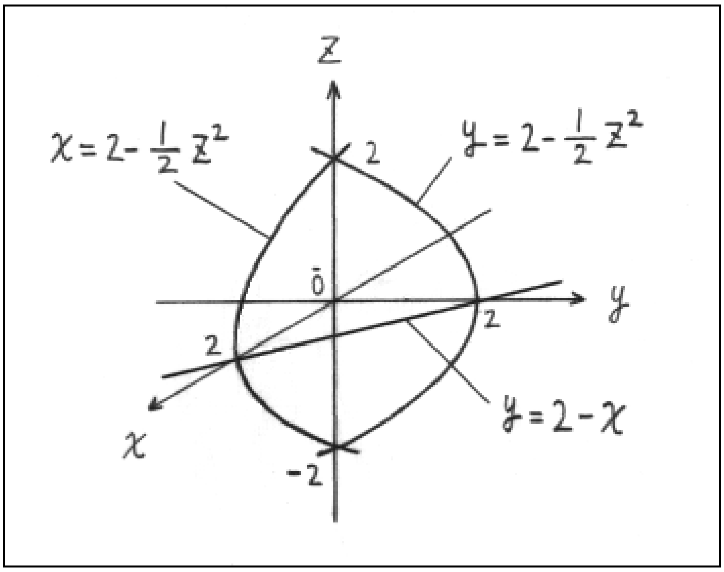

図 1．4．6－1　曲面 $2x+2y+z^2=4$ と、xy 平面・yz 平面・zx 平面との交線

次に曲面①と曲面②の交線の、xy 平面への投射を考える。そこでまず①と②の連立方程式をたて、これより z を消去した式を導出する。

②より$z^2=4-2x-2y$だから、これを①に代入して整理すると

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \qquad ③$$

を得る。③で表される図形は、点$(x,y)=(1,1)$を中心とした、xy平面上の半径１の円である。これと図１．４．６−１より、曲面①と②の交線のxy平面への投射は、次の図の実線で示した半円の部分になることが分かる。

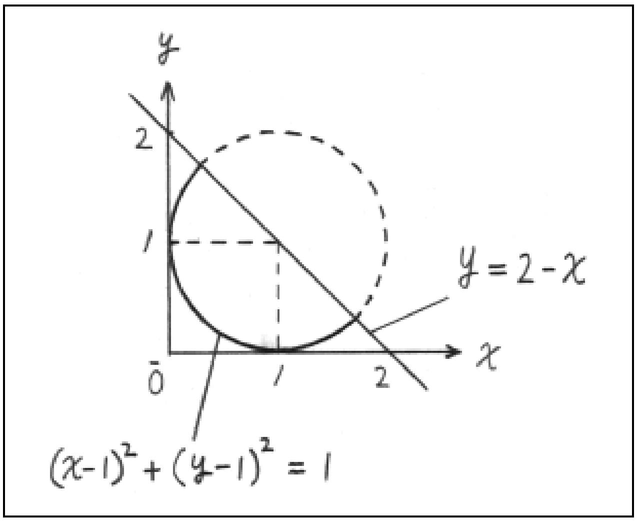

図１．４．６−２　曲面①と曲面②の交線の、xy平面への投射

次に、３次元の空間座標内で交線の軌跡を描くことを考える。①をzについて書き換えると

$$z=\pm\sqrt{3-x^2-y^2} \qquad ④$$

同様に②をzについて書き換えると

$$z=\pm\sqrt{2(2-x-y)} \qquad ⑤$$

先に示した半円上の各点(x,y)上で、④あるいは⑤のどちらかを用いてzの値を算出してプロットすれば、曲面①と曲面②の交線を描くことができる。

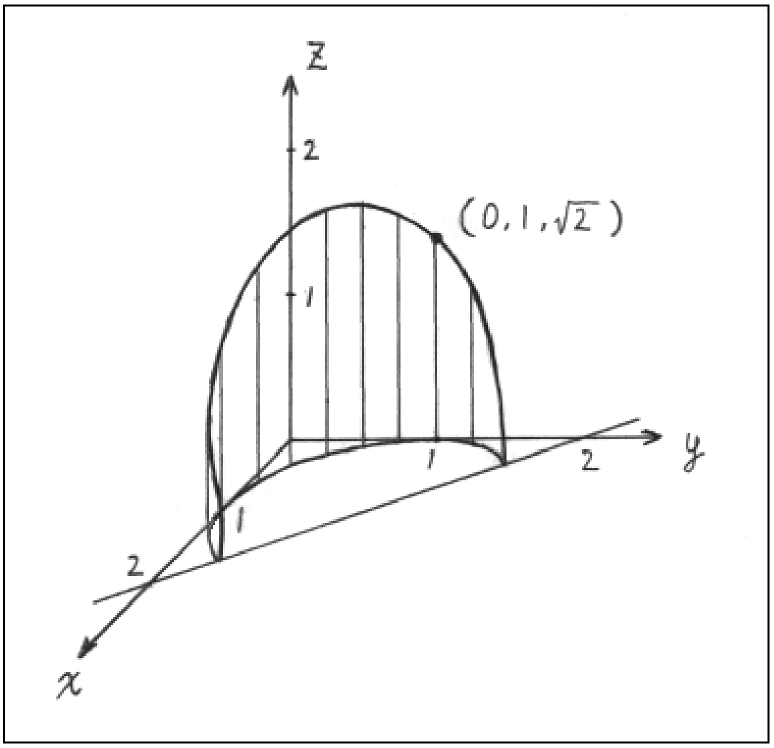

図１．４．６－３　曲面①と曲面②の交線（$z>0$）

点$\left(0,1,\sqrt{2}\right)$が曲面①と曲面②の交線上の点であることは、上図をみれば明らかである。

次に点$\left(0,1,\sqrt{2}\right)$における、曲面①と曲面②の法線ベクトル間の角度を求める。そこでまず２つのスカラー場ψとϕを考える。

$$\psi = x^2 + y^2 + z^2 \qquad ⑥$$

$$\phi = 2x + 2y + z^2 \qquad ⑦$$

①と⑥をくらべると、①がスカラー場ψの等位面$(\psi = 3 = const.)$を表していると分かる。同様に②がスカラー場ϕの等位面$(\phi = 4 = const.)$を表していることも分かる。

さてψおよびϕの勾配は、それぞれ次のようになる。

$$\nabla\psi = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$$\nabla\phi = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

この２つのベクトルの差を$\mathbf{A}$とおくと

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \nabla\psi - \nabla\phi = \nabla(\psi - \phi)\\ &= \nabla\left(x^2 - 2x + y^2 - 2y\right)\\ &= 2\{(x-1)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j}\}\end{aligned}$$

これら３つのベクトルの大きさは、それぞれ次のようになる。

$$|\nabla\psi|^2 = 4\left(x^2+y^2+z^2\right) \quad ,\ \text{これより}\ |\nabla\psi| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad ⑧$$

$$|\nabla\phi|^2 = 4\left(2+z^2\right) \quad ,\ \text{これより}\ |\nabla\phi| = 2\sqrt{2+z^2} \qquad ⑨$$

$$|\mathbf{A}|^2 = 4\left\{(x-1)^2+(y-1)^2\right\},\ \text{これより}\ |\mathbf{A}| = 2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \qquad ⑩$$

ここで$\nabla\psi$と$\nabla\phi$のなす角度をθとおくと、余弦定理より、３つのベクトル$\nabla\psi$，$\nabla\phi$，$\mathbf{A}$の間には次の関係が成立する。

$$|\mathbf{A}|^2 = |\nabla\psi|^2 + |\nabla\phi|^2 - 2|\nabla\psi||\nabla\phi|\cos\theta,\ \text{これより}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2|\nabla\psi||\nabla\phi|}\left(|\nabla\psi|^2 + |\nabla\phi|^2 - |\mathbf{A}|^2\right)$$

上式に⑧，⑨，⑩を代入して整理すると次式を得る。

$$\cos\theta = \frac{x+y+z^2}{\sqrt{\left(2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}} \qquad ⑪$$

こうして得た⑪に、座標値$(x,y,z)=\left(0,1,\sqrt{2}\right)$を代入すると

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{したがって}\ \theta = 30°$$

となる。この$\theta=30°$が、点$\left(0,1,\sqrt{2}\right)$における２つの曲面の法線間の角度となる。 ◆

1．4．7

重力加速度の絶対値をg、地面からの高さをzで表す。このとき地面を基準にした重力ポテンシャル$\phi(z)$は

$$\phi(z) = gz$$

で表される。上式より$z=0$およびhにおける重力ポテンシャルは、それぞれ次のようになる。

$$\phi(0) = 0,\quad \phi(h) = gh$$

また$\phi(z)$の勾配に負符号を掛けたものが、重力加速度ベクトル$\mathbf{g}$となる。

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi(z) = -g\mathbf{k}$$

zの定義域が$[0 \leqq z \leqq h]$であるとして、円筒のzより上にある部分の質量は

$$\rho\pi a^2(h-z)$$

で表される。したがって点zにおける重力$\mathbf{F}$は

$$\mathbf{F}(z) = \rho\pi a^2(h-z)\mathbf{g} = -g\rho\pi a^2(h-z)\mathbf{k}$$

となる。上式より$z=0$およびhにおける重力は、それぞれ次のようになる。

$$\mathbf{F}(0) = -g\rho\pi a^2 h\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}(h) = 0 \qquad \blacklozenge$$