１．３　置換記号（解答）

1．3．1

$$\left(\varepsilon_{1jk}\right)=\begin{pmatrix}\varepsilon_{111} & \varepsilon_{112} & \varepsilon_{113}\\ \varepsilon_{121} & \varepsilon_{122} & \varepsilon_{123}\\ \varepsilon_{131} & \varepsilon_{132} & \varepsilon_{133}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\ ,$$

$$\left(\varepsilon_{2jk}\right)=\begin{pmatrix}\varepsilon_{211} & \varepsilon_{212} & \varepsilon_{213}\\ \varepsilon_{221} & \varepsilon_{222} & \varepsilon_{223}\\ \varepsilon_{231} & \varepsilon_{232} & \varepsilon_{233}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\ ,$$

$$\left(\varepsilon_{3jk}\right)=\begin{pmatrix}\varepsilon_{311} & \varepsilon_{312} & \varepsilon_{313}\\ \varepsilon_{321} & \varepsilon_{322} & \varepsilon_{323}\\ \varepsilon_{331} & \varepsilon_{332} & \varepsilon_{333}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ .$$ ◆

1．3．2

異なるn個のものからr個をとる順列の総数${}_nP_r$は

$${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

で表される。これより$r=n$のときは${}_nP_n=n!$となる。　◆

1．3．3

（１）４つの異なる代数a,b,c,dについて：

順列の総数${}_4P_4$は

$${}_4P_4=\frac{4!}{(4-4)!}=4!=24\ .$$

これら各々の成分は以下の通り。

$$\begin{matrix} abcd & bacd & cabd & dabc\\ abdc & badc & cadb & dacb\\ acbd & bcad & cbad & dbac\\ acdb & bcda & cbda & dbca\\ adbc & bdac & cdab & dcab\\ adcb & bdca & cdba & dcba \end{matrix}$$

（２）a,a,c,d について：

一般に次の定理が成り立つ。

・a が p 個、b が q 個、・・・、d が s 個、合計で n 個のものがあるとき、

これらのものを全部並べてできる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!\cdots s!} \quad (n = p + q + \cdots + s) \ .$$

これより（２）の場合の順列の総数は

$$\frac{4!}{2!1!1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12 \ .$$

これら各々の成分は以下の通り。

$$\begin{array}{llll} aacd & - & caad & daac \\ aadc & - & cada & daca \\ acad & - & - & - \\ acda & - & - & - \\ adac & - & cdaa & dcaa \\ adca & - & - & - \end{array}$$

◆

1．3．4

題記の関係式の右辺を展開して

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnl} &= \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{il} + \delta_{km}\delta_{jl}\delta_{in} \\ &\quad - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{kn}\delta_{jl} \ . \end{aligned}$$

ここで $i = j$ の場合

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jjk}\varepsilon_{mnl} &= \delta_{jm}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{jl} + \delta_{km}\delta_{jl}\delta_{jn} \\ &\quad - \delta_{jl}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jn}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{jl} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。また ε の指標が重複する全ての場合において、同様のことが成り立つ。…　①

$ijk = 123$，　$mnl = 321$ の場合は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123}\varepsilon_{321} &= \delta_{13}\delta_{22}\delta_{31} + \delta_{23}\delta_{32}\delta_{11} + \delta_{33}\delta_{21}\delta_{12} \\ &\quad - \delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{12}\delta_{23}\delta_{31} - \delta_{13}\delta_{32}\delta_{21} \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。また ε の指標が互いに異なる全ての場合において、同様のことが成り立つ。

…　②

①および②より、題記の関係式は正しいことが分かる。　　◆

１．３．５

（ａ）の方法で第１式を証明：

$\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{njk}$ を問題１．３．４の形式で表すと

$$\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{njk}=\begin{vmatrix}\delta_{mn} & \delta_{mj} & \delta_{mk}\\ \delta_{jn} & \delta_{jj} & \delta_{jk}\\ \delta_{kn} & \delta_{kj} & \delta_{kk}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{mn} & \delta_{mj} & \delta_{mk}\\ \delta_{jn} & 1 & \delta_{jk}\\ \delta_{kn} & \delta_{kj} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\delta_{mn}+\delta_{jn}\delta_{kj}\delta_{mk}+\delta_{kn}\delta_{jk}\delta_{mj}-\delta_{kn}\delta_{mk}-\delta_{jn}\delta_{mj}-\delta_{mn}\delta_{kj}\delta_{jk}\quad ,$$

従って $\sum_{j,k}\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{njk}$ は

$$\sum_{j,k}\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{njk}=\delta_{mn}\sum_j\sum_k 1+\sum_j\delta_{jn}\left(\sum_k\delta_{kj}\delta_{mk}\right)+\sum_k\delta_{kn}\left(\sum_j\delta_{jk}\delta_{mj}\right)$$

$$-\sum_j\left(\sum_k\delta_{kn}\delta_{mk}\right)-\sum_k\left(\sum_j\delta_{jn}\delta_{mj}\right)-\delta_{mn}\sum_j\left(\sum_k\delta_{kj}\delta_{jk}\right)$$

$$=9\delta_{mn}+\sum_j\delta_{jn}\delta_{mj}+\sum_k\delta_{kn}\delta_{mk}-\delta_{mn}\sum_j 1-\delta_{mn}\sum_k 1-\delta_{mn}\sum_j 1$$

$$=9\delta_{mn}+\delta_{mn}+\delta_{mn}-3\delta_{mn}-3\delta_{mn}-3\delta_{mn}$$

$$=2\delta_{mn}\quad .$$

（ａ）の方法で第２式を証明：

$\varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijl}$ を問題１．３．４の形式で表すと

$$\varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijl}=\begin{vmatrix}\delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{ml}\\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nl}\\ \delta_{li} & \delta_{lj} & \delta_{ll}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{ml}\\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nl}\\ \delta_{li} & \delta_{lj} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\delta_{mi}\delta_{nj}+\delta_{ni}\delta_{lj}\delta_{ml}+\delta_{li}\delta_{nl}\delta_{mj}$$

$$-\delta_{li}\delta_{nj}\delta_{ml}-\delta_{ni}\delta_{mj}-\delta_{mi}\delta_{lj}\delta_{nl}\quad ,$$

従って $\sum_l\varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijl}$ は

$$\sum_l\varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijl}=\delta_{mi}\delta_{nj}\sum_l 1+\delta_{ni}\sum_l\delta_{lj}\delta_{ml}+\delta_{mj}\sum_l\delta_{li}\delta_{nl}$$

$$-\delta_{nj}\sum_l\delta_{li}\delta_{ml}-\delta_{ni}\delta_{mj}\sum_l 1-\delta_{mi}\sum_l\delta_{lj}\delta_{nl}$$

$$=3\delta_{mi}\delta_{nj}+\delta_{ni}\delta_{mj}+\delta_{mj}\delta_{ni}-\delta_{nj}\delta_{mi}-3\delta_{mj}\delta_{ni}-\delta_{mi}\delta_{nj}$$

$$=\delta_{mi}\delta_{nj}-\delta_{mj}\delta_{ni}\quad .$$

（b）の方法で第１式を証明：

ε_{mjk} について、m を固定して j,k について展開する。

$$\left(\varepsilon_{mjk}\right)=\begin{pmatrix}\varepsilon_{m11} & \varepsilon_{m12} & \varepsilon_{m13}\\ \varepsilon_{m21} & \varepsilon_{m22} & \varepsilon_{m23}\\ \varepsilon_{m31} & \varepsilon_{m32} & \varepsilon_{m33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_{m12} & -\varepsilon_{m31}\\ -\varepsilon_{m12} & 0 & \varepsilon_{m23}\\ \varepsilon_{m31} & -\varepsilon_{m23} & 0\end{pmatrix}$$

ε_{njk} についても同様に行う。

$$\left(\varepsilon_{njk}\right)=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_{n12} & -\varepsilon_{n31}\\ -\varepsilon_{n12} & 0 & \varepsilon_{n23}\\ \varepsilon_{n31} & -\varepsilon_{n23} & 0\end{pmatrix}$$

この結果を $\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{njk}$ にあてはめて

$$\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_{m12}\varepsilon_{n12} & \varepsilon_{m31}\varepsilon_{n31}\\ \varepsilon_{m12}\varepsilon_{n12} & 0 & \varepsilon_{m23}\varepsilon_{n23}\\ \varepsilon_{m31}\varepsilon_{n31} & \varepsilon_{m23}\varepsilon_{n23} & 0\end{pmatrix} .$$

$\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{njk}$ の j,k に関する総和は、上式より

$$\sum_{j,k}\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{njk}=2\left(\varepsilon_{m12}\varepsilon_{n12}+\varepsilon_{m23}\varepsilon_{n23}+\varepsilon_{m31}\varepsilon_{n31}\right) .$$

$m=n=1$ の場合、この総和は

$$\sum_{j,k}\varepsilon_{1jk}\varepsilon_{1jk}=2\varepsilon_{123}\varepsilon_{123}=2 ,$$

$m=n=2$ 或いは $m=n=3$ の場合も同様に

$$\sum_{j,k}\varepsilon_{2jk}\varepsilon_{2jk}=2\varepsilon_{231}\varepsilon_{231}=2 ,\quad \sum_{j,k}\varepsilon_{3jk}\varepsilon_{3jk}=2\varepsilon_{312}\varepsilon_{312}=2$$

となる。$m\neq n$ の場合、総和は必ずゼロになる。これらの結果は、問題文の第１式にて与えられる結果と同じである。ゆえに第１式は正しい。

（b）の方法で第２式を証明：

ε_{mnl} について、m,n を固定して l について展開する。

$$\left(\varepsilon_{mnl}\right)=\left(\varepsilon_{mn1}\quad \varepsilon_{mn2}\quad \varepsilon_{mn3}\right)$$

ε_{ijl} についても同様に行う。

$$\left(\varepsilon_{ijl}\right)=\left(\varepsilon_{ij1}\quad \varepsilon_{ij2}\quad \varepsilon_{ij3}\right)$$

この結果を $\varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijl}$ にあてはめて

$$\left(\varepsilon_{mn1}\varepsilon_{ij1}\quad \varepsilon_{mn2}\varepsilon_{ij2}\quad \varepsilon_{mn3}\varepsilon_{ij3}\right) .$$

$\varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijl}$ の l に関する総和は、上式より

$$\sum_l \varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijl} = \varepsilon_{mn1}\varepsilon_{ij1} + \varepsilon_{mn2}\varepsilon_{ij2} + \varepsilon_{mn3}\varepsilon_{ij3} \quad .$$

ここで $m = n$ 或いは $i = j$ の場合、総和は必ずゼロになる。$m \neq n$ かつ $i \neq j$ で、さらに ij が mn の置換でない場合も、総和は必ずゼロになる。

$m \neq n$ かつ $i \neq j$ で、さらに ij が mn の偶置換である場合、総和は $+1$ となる。例えば以下の通りである。

［$mn = 12$，$ij = 12$ の場合］

$$\sum_l \varepsilon_{12l}\varepsilon_{12l} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{123} = +1$$

$m \neq n$ かつ $i \neq j$ で、さらに ij が mn の奇置換である場合、総和は -1 となる。例えば以下の通りである。

［$mn = 12$，$ij = 21$ の場合］

$$\sum_l \varepsilon_{12l}\varepsilon_{21l} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{213} = -1$$

これらの結果は、問題文の第２式にて与えられる結果と同じである。ゆえに第２式は正しい。

1．3．6

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \sum_{m,n,l}\left(A_m B_n \varepsilon_{mnl}\right)\mathbf{e}_l \quad ,$$

$$\mathbf{C}\times\mathbf{D} = \sum_{i,j,k}\left(C_i D_j \varepsilon_{ijk}\right)\mathbf{e}_k \quad ,$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) &= \sum_{m,n,i,j}\sum_{l,k}\left[A_m B_n C_i D_j \varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijk}\left(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{e}_k\right)\right] \\
&= \sum_{m,n,i,j}\sum_{l}\left[A_m B_n C_i D_j \varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijl}\right] \\
&= \sum_{m,n,i,j}\left[A_m B_n C_i D_j\left(\sum_l \varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijl}\right)\right] \\
&= \sum_{m,n,i,j}\left[A_m B_n C_i D_j\left(\delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{mj}\delta_{ni}\right)\right] \\
&= \sum_{m,n,i,j} A_m C_i B_n D_j \delta_{mi}\delta_{nj} - \sum_{m,n,i,j} A_m D_j B_n C_i \delta_{mj}\delta_{ni} \\
&= \left(\sum_{m,i} A_m C_i \delta_{mi}\right)\left(\sum_{n,j} B_n D_j \delta_{nj}\right) - \left(\sum_{m,j} A_m D_j \delta_{mj}\right)\left(\sum_{n,i} B_n C_i \delta_{ni}\right) \\
&= \left(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3\right)\left(B_1D_1 + B_2D_2 + B_3D_3\right) \\
&\qquad - \left(A_1D_1 + A_2D_2 + A_3D_3\right)\left(B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3\right) \\
&= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \qquad \blacklozenge
\end{aligned}$$

1．3．7

（a）の方法で証明：

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=[\mathbf{D}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]\mathbf{C}-[\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]\mathbf{D}$$
$$=[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})]\mathbf{C}-[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\mathbf{D}$$ ，あるいは
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{C}\times\mathbf{D})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{A})$$
$$=[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]\mathbf{B}-[\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]\mathbf{A}\quad .$$

（b）の方法で証明：

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ および $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$ を次のように表す。

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\sum_{m,n,l}(A_m B_n \varepsilon_{mnl})\mathbf{e}_l$$
$$\mathbf{C}\times\mathbf{D}=\sum_{i,j,k}(C_i D_j \varepsilon_{ijk})\mathbf{e}_k$$

この２式をもとに、以下の順序で演算を行う。

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=\sum_{m,n,i,j}\sum_{l,k}\left[A_m B_n C_i D_j \varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijk}(\mathbf{e}_l\times\mathbf{e}_k)\right]$$
$$=\sum_{m,n,i,j}\sum_{l,k}\sum_{h}\left[A_m B_n C_i D_j \varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lkh}\mathbf{e}_h\right] \qquad \cdots ①$$
$$=\sum_{m,n,i,j}\sum_{l}\sum_{h}\left[A_m B_n C_i D_j \varepsilon_{mnl}\left(\sum_{k}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{hlk}\right)\mathbf{e}_h\right] \qquad \cdots ②$$
$$=\sum_{m,n,i,j}\sum_{l}\sum_{h}\left[A_m B_n C_i D_j \varepsilon_{mnl}(\delta_{ih}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jh})\mathbf{e}_h\right]$$
$$=\sum_{m,n,i,j}\sum_{l}\sum_{h}\left[A_m B_n C_i D_j \varepsilon_{mnl}\delta_{ih}\delta_{jl}\mathbf{e}_h\right]$$
$$-\sum_{m,n,i,j}\sum_{l}\sum_{h}\left[A_m B_n C_i D_j \varepsilon_{mnl}\delta_{il}\delta_{jh}\mathbf{e}_h\right]$$
$$=\sum_{m,n,i,j}\sum_{h}\left[A_m B_n C_i D_j \varepsilon_{mnj}\delta_{ih}\mathbf{e}_h\right]-\sum_{m,n,i,j}\sum_{h}\left[A_m B_n C_i D_j \varepsilon_{mni}\delta_{jh}\mathbf{e}_h\right]$$
$$=\left(\sum_{m,n,j}A_m B_n D_j \varepsilon_{mnj}\right)\left(\sum_{i,h}C_i\delta_{ih}\mathbf{e}_h\right)-\left(\sum_{m,n,i}A_m B_n C_i \varepsilon_{mni}\right)\left(\sum_{j,h}D_j\delta_{jh}\mathbf{e}_h\right)$$
$$=\left[\sum_{m}A_m\left(\sum_{n,j}B_n D_j \varepsilon_{njm}\right)\right]\left(\sum_{i}C_i\mathbf{e}_i\right)$$
$$-\left[\sum_{m}A_m\left(\sum_{n,i}B_n C_i \varepsilon_{nim}\right)\right]\left(\sum_{j}D_j\mathbf{e}_j\right)$$
$$=\left[\sum_{m}A_m(\mathbf{B}\times\mathbf{D})_m\right]\mathbf{C}-\left[\sum_{m}A_m(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_m\right]\mathbf{D}$$
$$=[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})]\mathbf{C}-[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\mathbf{D}\quad ,$$

あるいは①から②へかけての部分で

$$\sum_{l,k}\varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lkh} = \sum_{k}\varepsilon_{ijk}\left(\sum_{l}\varepsilon_{mnl}\varepsilon_{khl}\right)$$

とおいて以下同様に行えば、

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]\mathbf{B} - [\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]\mathbf{A}$$

を導出できる。　　◆