１．２　空間のベクトル（問題）

1．2．1　$\mathbf{A}=(1,2,3)$，$\mathbf{B}=(3,1,1)$であるとき、$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，$\mathbf{A}-\mathbf{B}$，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$，$\mathbf{A}$の$\mathbf{B}$への射影，$\mathbf{B}$の$\mathbf{A}$への射影，$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$，$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$，$\mathbf{e}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$を求めよ。

1．2．2　適切なベクトル算を用いて、加法定理を証明せよ。

（ａ）　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

（ｂ）　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

1．2．3　平行四辺形の２本の対角線は、互いに２等分し合うことを証明せよ。

1．2．4　立方体の角の１つを座標系の原点とし、それに接する３つの辺をx軸，y軸，z軸とする。このとき、原点を通る対角線を４本引くことができる。そのうち３本は（原点を介して隣接する）３つの平面上にある。もう１本は、立方体の中を横切って反対側の角へと通じている。これら対角線同士のなす角度をすべて求めよ。

1．2．5　空間内の点A,B,Cを表す位置ベクトルを$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$とするとき、三角形$ABC$の面積は$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|/2$で与えられる（例題 1．2．6 を参照）。この三角形を含む平面と原点の間の垂直距離が$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})/|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|$であることを証明せよ。

1．2．6　空間内の平面上の任意の点を表す位置ベクトルを$\mathbf{r}$とし、同じ平面上の、原点に最も近い点を表す位置ベクトルを$\mathbf{a}$とする。このとき$\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=a^2=Const.$である事を証明せよ。

1．2．7　空間内の定点Aを表す位置ベクトルを$\mathbf{a}$とし、任意の点を表す位置ベクトルを$\mathbf{r}$とする。このとき方程式$|\mathbf{r}-\mathbf{a}|=Const.=b$を満足する図形の種類を答えよ。

1．2．8　BAC 則を用いて、ヤコビの恒等式

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0}$$

を証明せよ。

1．2．9　未知のベクトル $\mathbf{X}$ が次の関係

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{b}=\beta,\quad \mathbf{X}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$$

を満たすとき、$\mathbf{X}$ を $\beta,\mathbf{b},\mathbf{c}$ を用いて表せ。（ヒント：$\mathbf{X}$ を、互いに直交する３つのベクトル $\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ の方向に分解して、BAC 則を適用する。）

1．2．10　ベクトル $\mathbf{D}$ が、同一平面上にない任意の３つのベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ の線形結合であるとき（$\mathbf{D}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}+c\mathbf{C}$）、

$$a=\frac{\mathbf{D}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}$$

であることを証明せよ。b および c についても同様の記述を導け。

1．2．11　任意の３つのベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ が同一平面上に存在するための条件を述べよ。

1．2．12　ベクトル積 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})$ が、$\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ の属する平面と、$\mathbf{C}$ および $\mathbf{D}$ の属する平面との交線に平行であることを証明せよ。

1．2．13　$\mathbf{r}$ および $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ がともに時間の関数であるとき、次式を証明せよ。

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{r})]=r^2\mathbf{a}+(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}-(\mathrm{v}^2+\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\mathbf{r}$$

ここで $\mathbf{a}$ は加速度を表す。