１．２　空間のベクトル（解答）

1．2．1

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(1+3,\ \ 2+1,\ \ 3+1)=(4,3,4),$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=(1-3,\ \ 2-1,\ \ 3-1)=(-2,1,2),$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=1\cdot 3+2\cdot 1+3\cdot 1=3+2+3=8,$$

$$\mathbf{A}\text{ の }\mathbf{B}\text{ への射影}=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{B}=\frac{8}{\sqrt{11}},$$

$$\mathbf{B}\text{ の }\mathbf{A}\text{ への射影}=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{A}=\frac{8}{\sqrt{14}},$$

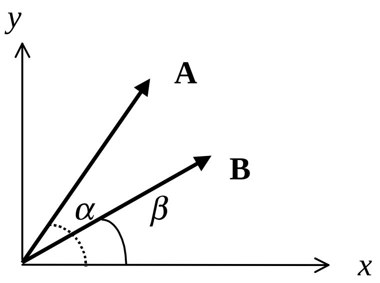
$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=\mathbf{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\mathbf{j}(A_zB_x-A_xB_z)+\mathbf{k}(A_xB_y-A_yB_x)\\&=\mathbf{i}(2\cdot 1-3\cdot 1)+\mathbf{j}(3\cdot 3-1\cdot 1)+\mathbf{k}(1\cdot 1-2\cdot 3)\\&=-\mathbf{i}+8\mathbf{j}-5\mathbf{k},\end{aligned}$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=\sqrt{1+64+25}=3\sqrt{10},$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}=\frac{1}{3\sqrt{10}}(-\mathbf{i}+8\mathbf{j}-5\mathbf{k})\qquad\blacklozenge$$

1．2．2

（ａ）について：



上図より

$$\theta_{Ax}=\alpha,\ \ \theta_{Bx}=\beta,\ \ \theta_{AB}=\alpha-\beta\ \ ,$$

A と **B** のスカラー積は

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos(\alpha-\beta)=A_xB_x+A_yB_y\ \ ,$$

これより

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\frac{A_x}{A}\frac{B_x}{B}+\frac{A_y}{A}\frac{B_y}{B}\\&=\cos\theta_{Ax}\cos\theta_{Bx}+\sin\theta_{Ax}\sin\theta_{Bx}\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

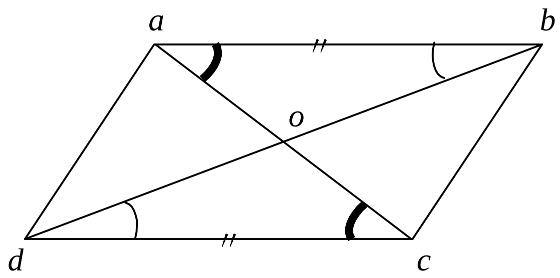
（b）について：

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=\mathbf{k}BA\sin(\alpha-\beta)=\mathbf{k}\left(B_x A_y - B_y A_x\right)\ ,$$

※ $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{B_x}{B}\dfrac{A_y}{A}-\dfrac{B_y}{B}\dfrac{A_x}{A}$ ◆

$$=\cos\beta\sin\alpha-\sin\beta\cos\alpha$$

1．2．3

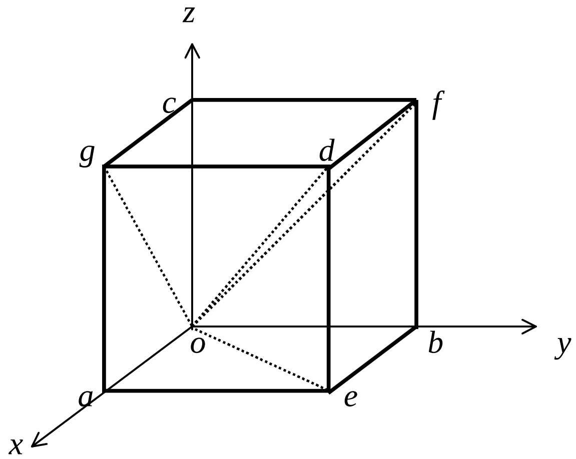


四角形 abcd は平行四辺形であり、次の性質をもつ。

（1）辺 ab と辺 cd の長さは等しい。
（2）角 oab と角 ocd の角度は等しい。
（3）角 oba と角 odc の角度は等しい。

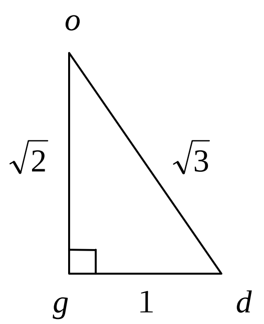
これら３つの性質は、△oab と△ocd が合同である為の条件を満たしている。合同であるから $\overline{oa}=\overline{oc}$、$\overline{ob}=\overline{od}$ となる。ゆえに命題「平行四辺形の２本の対角線は、互いに２等分し合う」は真である。 ◆

1．2．4



$\overline{oa} = \overline{ob} = \overline{oc} = 1$とする。

① $\overline{od}$ と $\overline{og}$, $\overline{oe}$, $\overline{of}$ のなす角度：



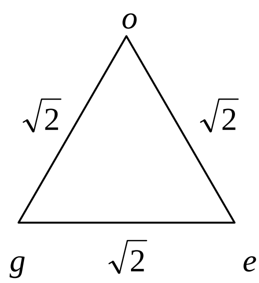
三平方の定理を用いて△odg 各辺の長さを求めると、上図のようになる。これより

$$\angle \mathrm{dog} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad 35.3° \ ,$$

また、立方体の対称性より

$$\angle \mathrm{dog} = \angle \mathrm{doe} = \angle \mathrm{dof} \quad 35.3° \ .$$

② $\overline{og}$, $\overline{oe}$, $\overline{of}$ 間の角度：



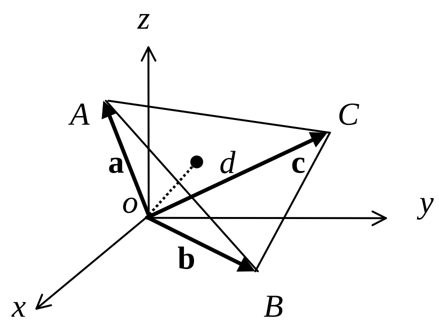
①と同じく△eog 各辺の長さを求めると、各辺が$\sqrt{2}$ の長さをもつ正三角形となる。これより

$$\angle \mathrm{eog} = 60° \ ,$$

また、立方体の対称性より

$$\angle \mathrm{eog} = \angle \mathrm{foe} = \angle \mathrm{gof} = 60° \ . \quad ◆$$

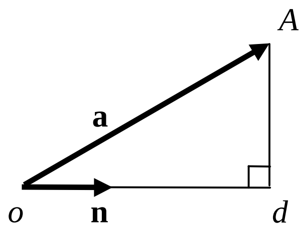
1．2．5



△ABC を含む平面の法線ベクトル $\mathbf{n}$ は次式で表される。

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}\right|}$$

原点を通り $\mathbf{n}$ に平行な直線と、△ABC との交点を d とする。この時、△Aod は以下のようになる。

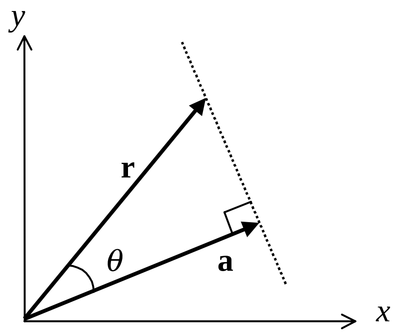


辺 od の長さ（$\overline{od}$ と表す）が、求める答えとなる。

$$\begin{aligned}\overline{od}&=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\\&=\frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}\right|}\\&=\frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}\right|}\end{aligned}$$

◆

1．2．6

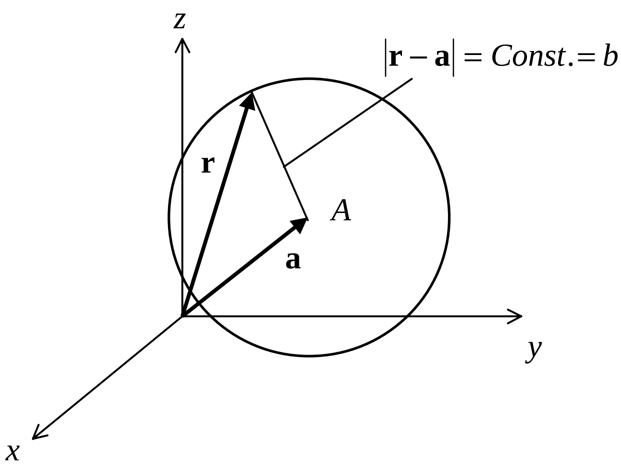


$\mathbf{r}$ と $\mathbf{a}$ のなす角度をθとする。上図より

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = (r\cos\theta)\cdot a = a\cdot a$$
$$= a^2 = Const.$$

◆

1．2．7



上図に示す通り、$|\mathbf{r}-\mathbf{a}| = Const. = b$ は点 A を中心とする半径 b の球面を表す方程式である。 ◆

1．2．8

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \quad \cdots \text{①}$$
$$\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \quad \cdots \text{②}$$
$$\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) \quad \cdots \text{③}$$
$$\text{①}+\text{②}+\text{③}=\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})+\mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$
$$=\mathbf{0}$$
◆

1．2．9

A, B, C を定数として $\mathbf{X}$ を次のように表す。

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{b}=\beta \quad \cdots \quad \text{①}$$
$$\mathbf{X}\times\mathbf{b}=\mathbf{c} \quad \cdots \quad \text{②}$$
$$\mathbf{X}=A\mathbf{b}+B\mathbf{c}+C(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \quad \cdots \quad \text{③}$$

（１）まず A を求める。式①より

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{b}=A\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\beta$$

※ $A=\dfrac{\beta}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}$

（２）B および C を求める。

$$\mathbf{X}\times\mathbf{b}=B(\mathbf{c}\times\mathbf{b})+C[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{b}]$$

BAC 則を用いて右辺を整理すると

$$\mathbf{X}\times\mathbf{b}=B(\mathbf{c}\times\mathbf{b})+C(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

ここで式②より $\mathbf{X}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$ だから

※ $B=0$

※ $C=1/\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$

（３）（１）および（２）の結果を式③に代入して

$$\mathbf{X}=\frac{\beta}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}+\frac{1}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$
◆

1．2．10

（１）
$$a=\frac{\mathbf{D}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})} \quad \cdots \quad \text{①}$$
$$\mathbf{D}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=a[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]+b[\mathbf{B}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]+c[\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})] \quad \cdots \quad \text{②}$$

$\mathbf{B}$ と $(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$、および $\mathbf{C}$ と $(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ は互いに垂直だから

$$\mathbf{B}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0$$
$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0$$

の関係が成り立つ。これを②に代入して

$$\mathbf{D}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=a\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\ ,$$

これより次式を得る。

$$\frac{\mathbf{D}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}=a\frac{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}=a$$

（２）①において a, b, c および $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ の位置を循環的に交換して

$$b=\frac{\mathbf{D}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})}{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})},\quad c=\frac{\mathbf{D}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}$$

という関係の成立することが予想される。（１）に示した手順に従えば、それらは容易に証明できる。

$$\mathbf{D}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=b\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$$

※ $$\frac{\mathbf{D}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})}{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})}=b\frac{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})}{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})}=b$$

$$\mathbf{D}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=c\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

※ $$\frac{\mathbf{D}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}=c\frac{\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}=c$$ ◆

1．2．11

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ が同一平面上に存在するとき、$\mathbf{A}$ と $(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$、および $\mathbf{A}$ と $(\mathbf{C}\times\mathbf{B})$ は直交する。すなわち

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B})=0$$

という関係が成立する。上式において $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ の位置を循環的に交換しても、同様の関係が成立する。

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B})\\&=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})\\&=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{A})=0\end{aligned}$$ ◆

1．2．12

　平面１の法線ベクトルを$\mathbf{n}_1$，平面２の法線ベクトルを$\mathbf{n}_2$とする。このとき$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$は平面１および平面２の交線に平行である。　…　①

（以下の証明では、この関係に着目する。）

平面１（$\mathbf{A}$および$\mathbf{B}$の属する平面）の法線ベクトルを$\mathbf{n}_1$とすると

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad \cdots \quad ②$$

平面２（$\mathbf{C}$および$\mathbf{D}$の属する平面）の法線ベクトルを$\mathbf{n}_2$とすると

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{C} \times \mathbf{D} \quad \cdots \quad ③$$

②、③より

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \quad \cdots \quad ④$$

　①～④より「$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$が、$\mathbf{A}$および$\mathbf{B}$の属する平面と、$\mathbf{C}$および$\mathbf{D}$の属する平面との交線に平行である」事が分かる。　◆

1．2．13

　$\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})$を$BAC$則にしたがって展開する。

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}$$

これに微分演算子d/dtを作用させると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}\right] &= \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{dt}\mathbf{v} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{dt}\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\frac{d\mathbf{r}}{dt} \\
&= \mathbf{v}\left(2 \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r}\right) + r^2\mathbf{a} - \mathbf{r}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \\
&= 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + r^2\mathbf{a} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \\
&= r^2\mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - \left(\mathrm{v}^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}\right)\mathbf{r}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})\right] = r^2\mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - \left(\mathrm{v}^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}\right)\mathbf{r} \qquad ◆$$