

## 第1章 空間のベクトルおよび場

### 1.1 空間の概念

物理学とは、空間内で絶えず変化する物理現象を客観的に記述するための学問である。空間に対する我々の直観的な認識は、人類創世よりの必然的課題であった「領土の保有」にまつわる問題に端を発している。（自己の安全と利益のため、我々は我々自身を取り囲む環境を守っていく必要がある、すなわちそういう事である。）そのうち科学や哲学、そしてより現実的な課題であった灌漑事業での土地測量、あるいは建築・航海などにおいて、客観的な法則を見つけようとする精力的な試みが行われ、多くの新発見がなされた。当時の偉大な数学者たちの多くは幾何学者であった。すぐに思いつく所では、ユークリッドの著作「幾何学原論」、幾何学に関するアルキメデスの発見、そしてアポロニウスの円錐曲線幾何学などを挙げる事ができよう。

ギリシャ人によって培われた数学の伝統は、やがてアラブ人に受け継がれた。彼らは算術法、そして代数学に大いに貢献した。その後、ルネサンス期にヨーロッパへ輸入されたアラブの数学書は、ヨーロッパ人たちの間に代数学への興味を呼び起こした。この事は、17世紀における2つの重要な発展（解析幾何学および微積分学という、現代数学の基礎となる発見）のきっかけとなった。この2つの新しい数学が、空間内における物理現象の記述方法に決定的な影響を与えることになる。

デカルトは著書「幾何学（1637年）」の中で、幾何学の問題を解決するために代数学の技法を用いた。この本は、当時ゆるやかに進歩しつつあった解析学に、大きな衝撃を与えた。そしてその世紀後半になって、ニュートンとライプニッツにより、1つの体系に確立された。

ニュートンはその当時、もっとも卓越した頭脳の持ち主であった。彼は幾何学・代数学・解析学において、幾つもの重要な発見を成した。そして特に物理学への貢献が、彼の名を不動のものとした。

ニュートン以前の物理学は、地上や空での物理現象に関する、多くの経験法則から成り立っていた。しかしニュートンが現れる前の世紀に、2つの重要な発見がなされた。ガリレオは慣性の法則、加速度の法則、落体の運動法則などを発見した。ケプラーは、彼の師であるティコ・ブラーエの天体観測資料より、惑星の運行に関する3つの法則を見出した。そして1687年に出版された有名な著書「自然哲学の数学的原理」の中で、ニュートンは運動の3法則を提唱し、これによって上述の、見た目には異なる種々の物理現象を統一

的に記述することに成功した。その理論では「空間内での体系の運動の初期状態と、体系に時々刻々作用する力が明らかであれば、その後の体系の運動状態を正確に計算する事ができる」ということが明らかにされた。また惑星の運行に関するケプラーの経験法則が、物体間に働く相互作用の法則 万有引力の法則 から導かれる帰結であることを示すことによって、ニュートンは彼の理論の正当性を証明した。この、力学についての決定論的かつ機械論的な描像は、大きな成功を収めた。それはまた19世紀の終わりにいたるまで、あらゆる物理現象を理解するための理論的基礎ともなった。

要約して言うと、ニュートン力学とは、位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ で表される質点の運動を記述するものである。質点は外部から作用する力 ある距離だけ離れた、たとえば位置ベクトル $\mathbf{r}'$ で表される別の質点から作用する力 によって加速度運動を行う。言い方を変えれば、互いに重力を及ぼしあう2つの質点が存在するだけで、空間そのものは、何も無い空っぽの場所だと考えられる。

空間に関するニュートン流の考え方は19世紀に至るまで、全く正しいものとして受け入れられてきた。しかしその後、独学により才能を身につけたファラデーが、電磁現象に関する新しい原理を、実験により発見した。磁石や荷電体、そして電流などに働く複雑な相互作用を記述するには、高度な数学的技法を必要とするが、ファラデーにはその種のテクニックは全く扱えなかった。その代わり“相互作用の働く空間は、源となる物体から放射される力線群によって満たされ、それが空間の全域に場となって広がっている”と考えることによって、彼は相互作用を直観的に表現することに成功した。

ファラデーが提案した、直観的で現実をうまく説明する“力線”のイメージは、理論物理学者マクスウェルによって立派な数学体系に仕上げられた。ファラデーや他の研究者達の仕事に刺激を受けた彼は、電磁現象が電場・磁場によって満たされた空間内で生起すること、およびその様子がマクスウェル方程式とよばれる4つの方程式で記述できることを、1864年に提出した論文で明らかにした。これらの場は、真空領域を含めた全宇宙にあまねく行き渡る、媒質エーテルの存在を仮定していた。その媒質にはエネルギーを受け取ったり蓄えたりする性質があること、そして波動を伝達する性質があること等が仮定された。また電磁的攪乱の伝播速度は計算することができ、その結果、それは光の速度に一致すべきことが明らかになった。また偏光現象が媒質の電磁的特性に左右されるという既知の事実をもとに、マクスウェルは光自身が電磁波の一種であろうと推測した。この後しばらくして、非光学的な性質の電磁波が、実験室内で生成・確認された。この実験はヘルツによって達成された。彼は電磁波が、(理論的な計算に基づく)期待通りの速度で伝播することを発見した。このようにして、空間内に広がる電磁場という概念の実在性が、説得力のある形で立証された。それゆえ今後、物理学の対象としての空間には、以前の古い力学

の描像 離れた所にある質点間に働く遠隔相互作用 とは異なった性質を仮定することになる。

(1879年、マクスウェルによって)まもなく根源的な疑問が提出された: エーテルに対する地球の相対運動を検出することは、果たして可能だろうか? 決定的な答えが1887年、マイケルソンとモーリーによって与えられた。彼らは何らの相対運動をも見出すことができなかった。

相対運動あるいは絶対運動に関する問いは古代からのものである。太陽・月・惑星、そして恒星は毎日規則正しく天空を行進してゆく。古代ギリシャの合理主義者たちは、地球のまわりを天上の星々が回転しているのだと考えた。太陽・月・惑星はまた恒星につき従って、その位置を変えてゆく。このとき太陽の経路は1年周期で変動する。この事実を“太陽が地球のまわりを周回している”と解釈する説が、かつて広く受け入れられていた。この描像は、2世紀にプトレマイオスが考案した惑星運動模型の定量的な表現に基いていた。やがて16世紀になり、先のモデルに基く誤った学説の集積がコペルニクスにより一掃され、ギリシャ時代からの描像が新しいモデル 地球と惑星が太陽のまわりを周回する で置き換えられた。

その後ニュートンによって、惑星運動の力学的構造がようやく解明された。それは物理現象に関する一般的な力学理論から導かれる、多くの結論のうちの1つとして提示された。力は“絶対”運動を引き起こす原因とされた。また力の法則は、互いに等速度で運動する全ての慣性系で、同じ形をとることが示された。しかし一方でニュートンは、“絶対静止”空間の概念をも容認していた。そう考えることが力学的に無意味であるにも係らず、である。彼は時間の概念を、空間とは完全に独立した存在だと、当然のように考えていた。

1905年、物理学界に輝く星が出現した。アインシュタインという名の無名の特許技師が、物理学に関する3つの革新的な論文を公にした。なかでも運動物体の電気力学に関する研究が、おそらく最も革命的なものであった。この論文で彼は、多大な成功を収めたマクスウェルの電気力学がニュートン力学と同様、相対運動のみに基づいて記述されるべきこと、あるいは絶対静止系なる概念に依存すべきでないことを指摘した。彼はこの考察をさらに一般化して相対性原理を提唱した。この原理の意味するところは、物理法則がすべての慣性系で同じ形をとり(力学の方程式が不変である、ということ)、また絶対静止系なる概念が不要である、ということである。彼はさらに次の事実をも原理とみなした。すなわち「真空中での光速は常に一定であり、それは光源あるいは観測者の相対運動とは無関係である」。これらの原理から彼は驚くべき結論を導き出した: 絶対的な静止空間だけではなく、絶対的な時間の流れもまた、存在しない。たとえば静止系から運動系への

座標変換の際、その影響は空間軸及び時間軸の両方に作用する。アインシュタインが特殊相対性理論と名づけたこの理論において、物理学は、“空間”内ではなく“時空間”内で物理現象をとり扱う。

特殊相対性理論における数々の帰結　その多くがアインシュタイン自身によって導かれたのだが　は、全てが実験によって、極めて高い精度で立証されている。中でも質量とエネルギーの等価法則（関係式  $E = mc^2$  によって有名な）は、物理学上の問題としての枠を大きく超えて、核兵器時代到来の先導役を果たすこととなった。

空間と時間の統合を果たしたことと同じく注目に値することだが、間もなくアインシュタインは慣性系のみ特別扱いしていることを、不自然だと考えるようになった。その不自然さとは、慣性系の概念が誤って定義されているのではないか、ということである：慣性系においては、外力が働かない限り、物体は等速直線運動を行う。しかし我々は、物体が等速直線運動を行うときに限り、そこには外力が存在しないと言えることを知っている。これは循環論法の典型的な例である。

上記の問いに対する答えはアインシュタイン自身により、彼が建設した一般相対性理論（1916年）において与えられた。彼は次の考察から出発した。すなわち重力場中を自由落下する密閉状態のエレベーターと、その中にいて共に自由落下する観測者を考えた場合、この観測者は彼のいる世界（エレベーターの中の限られた世界）が慣性系であると判断するだろう。物理法則の定式化に際して、この局所慣性系（あるいは自由落下系）と外部の（すなわち、まったく加速されていない）慣性系との間に区別を設けてはならないということを、まさにアインシュタインは見抜いた。また、これはガリレオの時代から知られていたことだが、いかなる質量の物体についても自由落下の際、同じ加速度が働くという重力の効果に、アインシュタインは特に印象づけられた。（これは概ね次のように説明できる。すなわち重力質量は常に慣性質量に比例し、そしておそらく、両者は一致すると考えられる。）重力のこの普遍的な効果をもとに、アインシュタインは、重力作用により物体の経路が曲がる現象を、空間自身の湾曲により生ずるものとして説明することに成功した。このようにして空間（より正確には、時空間）それ自身は、以前には全く思いもよらなかった方法で、重要な力学的性質を負わされることになった。

アインシュタインは彼の人生における多くの時間を費やして、電磁場もまた、時空間の幾何学的構造に組み込まれるべき事を示そうと試みた。しかし彼のこの試みは成功しなかった。電磁相互作用と亜原子粒子（素粒子、原子核など）間に働く弱い相互作用との統一にみられる現代の成功は、時空間の特性にではなく、（空間内で物理的特性が記述される）両場の位相角に基いている。言い換えれば、これらの相互作用の違いは、空間内に存在す

る両場の内部特性の違いとして説明できる。しかし重力に対しても同様の記述が許されるかどうか、まだ明らかではない。

本章において我々は、物理的な空間の概念について少しずつ確実に理解していき、そして記述するため、そこで用いる数学の初歩から学習を始めることとする。取り扱う項目には、空間のベクトルおよび場、そして曲線座標の使い方などが含まれる。