P.103　補足説明（§17. Newtonの運動方程式との比較、永久重力場）

式（17.12）の導出

$$\frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2}+\partial_\lambda\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\eta^\lambda+2\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{d\eta^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0 \qquad (17.11)$$

$$\frac{D\eta^\mu}{D\tau}=\frac{d\eta^\mu}{d\tau}+\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\eta^\sigma \qquad ①$$

$$\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{D\eta^\mu}{D\tau}\right)+\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{D\eta^\sigma}{D\tau} \qquad ②$$

まず②式右辺の第１項を計算する。

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{D\eta^\mu}{D\tau}\right)=\frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2}+\frac{d\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}\eta^\sigma+\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2}\eta^\sigma+\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{d\eta^\sigma}{d\tau} \quad , \qquad ③$$

③式右辺の第２項について

$$\frac{d\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}}{d\tau}=\partial_\lambda\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\lambda}{d\tau} \quad ,$$

③式右辺の第３項に運動方程式（16.3）を代入して、次式を得る。

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{D\eta^\mu}{D\tau}\right)=\frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2}+\partial_\lambda\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}\eta^\sigma-\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\eta^\sigma$$
$$+\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{d\eta^\sigma}{d\tau} \quad . \qquad ③'$$

つぎに②式右辺の第２項を計算する。

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{D\eta^\sigma}{D\tau}&=\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\left(\frac{d\eta^\sigma}{d\tau}+\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\eta^\beta\right)\\&=\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{d\eta^\sigma}{d\tau}+\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\eta^\beta\end{aligned} \qquad ④$$

③'および④より、（添字を入れ換えて）②は以下の通りとなる。

$$\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2}=\frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2}+\partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\eta^\lambda+\Gamma^\mu{}_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\lambda}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\eta^\lambda$$
$$-\Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\eta^\lambda+2\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{d\eta^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \quad ,$$ これより

$$\frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2}=\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2}+\left\{-\partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}-\Gamma^\mu{}_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\lambda}+\Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\right\}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\eta^\lambda$$
$$-2\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{d\eta^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \quad .$$

よって（17.11）は

$$\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2}+\left\{\partial_\lambda\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}-\partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}+\Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}-\Gamma^\mu{}_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\lambda}\right\}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\eta^\lambda=0 \quad .$$

ここで（15.2）より

$$R^\mu{}_{\alpha\lambda\beta}=\partial_\lambda\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}-\partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}+\Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}-\Gamma^\mu{}_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\lambda} \quad ,$$

よって次式が導かれる。

$$\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2}+R^\mu{}_{\alpha\lambda\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\eta^\lambda\frac{dx^\beta}{d\tau}=0 \quad . \qquad (17.12)$$

◆