

P.77 補足説明 (§ 14 . 共変微分)

共変ベクトルの共変微分が2階共変テンソルになることの証明

共変微分 $\nabla_\nu A_\mu$ がテンソルであれば、次の関係が成立する筈である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla'_\beta A'_\alpha = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \nabla_\nu A_\mu \\ = \partial'_\beta A'_\alpha - \Gamma'^\lambda_{\alpha\beta} A'_\lambda \end{array} \right.$$

以下、 $\nabla'_\beta A'_\alpha$ の演算を行ってこれを検証する。

$$\begin{aligned} \nabla'_\beta A'_\alpha &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \nabla_\nu A_\mu \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_\lambda \right) \\ &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} - \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_\lambda \quad , \end{aligned}$$

上式右辺第1項について

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} A_\lambda \right) - \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} A_\lambda \\ &= \partial'_\beta A'_\alpha - \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} A_\lambda \quad , \end{aligned}$$

これを に代入して (13 . 4) を適用すると

$$\begin{aligned} \nabla'_\beta A'_\alpha &= \partial'_\beta A'_\alpha - \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} \right) A_\lambda \\ &= \partial'_\beta A'_\alpha - \left\{ \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \cdot \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right\} \left\{ \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\sigma} A_\lambda \right\} \\ &= \partial'_\beta A'_\alpha - \Gamma'^\sigma_{\alpha\beta} A'_\sigma \end{aligned}$$

となる。以上の結果より、 $\nabla_\nu A_\mu$ はその添字が示すタイプの2階共変テンソルであると分かる。