P.49　補足説明（§10. テンソル密度、反対称テンソル、デュアル・テンソル）

　次式で表されるテンソル量

$$ {}^{*}\mathbf{f}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2!}\mathbf{E}^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma} \qquad ① $$

について、${}^{*}\mathbf{f}^{\mu\nu}$ が反対称２階反変テンソル密度であることを証明しておく。

（証明）①によれば、x'-系における ${}^{*}\mathbf{f}'^{\mu\nu}$ は

$$ {}^{*}\mathbf{f}'^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2!}\mathbf{E}^{\mu\nu\rho\sigma} f'_{\rho\sigma} \qquad ② $$

となる。一方 ${}^{*}\mathbf{f}^{\mu\nu}$ の、x-系から x'-系への一般座標変換は、テンソル密度の定義より

$$ {}^{*}\mathbf{f}'^{\mu\nu} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\,{}^{*}\mathbf{f}^{\alpha\beta} \qquad ③ $$

となる。よって②＝③であることが示せれば、①が反対称２階反変テンソル密度であることを証明したことになる。

　③の ${}^{*}\mathbf{f}^{\alpha\beta}$ に①を代入すると、${}^{*}\mathbf{f}'^{\mu\nu}$ は

$$ {}^{*}\mathbf{f}'^{\mu\nu} = \frac{1}{2!}\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\mathbf{E}^{\alpha\beta\gamma\lambda} f_{\gamma\lambda} \qquad ④ $$

となる。一方 $f_{\gamma\lambda}$ の、x'-系から x-系への一般座標変換は

$$ f_{\gamma\lambda} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} f'_{\rho\sigma} $$

であり、これを④に代入して整理すると

$$ \begin{aligned} {}^{*}\mathbf{f}'^{\mu\nu} &= \frac{1}{2!}\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\left\{\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}}\mathbf{E}^{\alpha\beta\gamma\lambda}\right\} f'_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2!}\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\mathbf{E}^{\mu\nu\rho\sigma} f'_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2!}\mathbf{E}^{\mu\nu\rho\sigma} f'_{\rho\sigma}\ , \end{aligned} $$

すなわち②＝③の成立することが分かる。　◆