P.43　補足説明（§9．計量テンソルの 2,3 の特別な性質）

● 行列式 $\det(g_{\mu\nu})$ の一般座標変換

一般座標変換に対して行列式 $g=\det(g_{\mu\nu})$ がどう変換されるかを調べる。まず行列 I, G, J, G' を次のように定義する。

$$I=(I_{\mu\alpha})=\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\right)=J^{T}\,,\quad G=(g_{\alpha\beta})\,,\quad J=(J_{\beta\nu})=\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\right)\,,$$

$$G'=(g'_{\mu\nu})=\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\right)$$

このように置くとき、G' と I, G, J の間には次の関係が成立する。

$$G'=IGJ$$

上式より $g'(x')$ は

$$g'(x')=|G'|=|I|\cdot|G|\cdot|J|$$
$$=g(x)|I|\cdot|J|=g(x)|J|^{2}$$

となる。ここで $|J|$ はヤコビの行列式であり、これを記号 $\partial(x)/\partial(x')$ で表すと、上式は

$$g'(x')=\left\{\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right\}^{2}g(x)\quad ,\qquad \text{あるいは}$$

$$\sqrt{-g'(x')}=\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\sqrt{-g(x)}$$

と書ける。これが g から g' への変換則となる。　◆