P.42　余行列式についての補足説明（§9．計量テンソルの 2,3 の特別な性質）

４次の行列式 $D=\det(a_{ij})$ を例にとって、余行列式を説明する。

$$D=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

この行列式は、３次の行列式の和へと展開できる。

$$D=a_{00}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{01}\begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+a_{02}\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{03}\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad ①$$

一般に n 次の行列式 D において、要素 a_{ij} に対し a_{ij} を含む行と列を D から除去して得られる行列式を D_{ij} で表し、また

$$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$$

とおいて、この $\tilde{a}_{ij}$ を行列式 D における要素 a_{ij} の余行列式という。この記号を用いれば、①式は

$$\begin{aligned} D&=a_{00}D_{00}-a_{01}D_{01}+a_{02}D_{02}-a_{03}D_{03} \\ &=a_{00}\tilde{a}_{00}+a_{01}\tilde{a}_{01}+a_{02}\tilde{a}_{02}+a_{03}\tilde{a}_{03} \end{aligned}$$

と書ける。これを４次の行列式 D の、第１行に沿っての展開式という。同じやり方で、第 i 行に沿っての展開式や、第 j 列に沿っての展開式を得ることができる。

さらに行列式 D を、たとえば a_{00} で偏微分することを考える。①式をみると、右辺第１項にのみ a_{00} が含まれている。そのため

$$\frac{\partial D}{\partial a_{00}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\tilde{a}_{00}$$

となる。同じことが、他の要素a_{ij}についても成立する。

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ij}} = \tilde{a}_{ij} \qquad ②$$

また、正方行列$A = \left(a_{ij}\right)$が正則（$D \neq 0$）であれば、Aとその逆行列A^{-1}の間には次の関係が成立する。

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\left(\tilde{a}_{ij}\right)^t = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{00} & \tilde{a}_{10} & \cdot & \tilde{a}_{n0} \\ \tilde{a}_{01} & \tilde{a}_{11} & \cdot & \tilde{a}_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{a}_{0n} & \tilde{a}_{1n} & \cdot & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{，あるいは}$$

$$\left(\tilde{a}_{ij}\right)^t = DA^{-1} \quad \text{，さらに両辺の右側から行列}A\text{を掛けて}$$

$$\left(\tilde{a}_{ij}\right)^t A = DE \quad （E\text{は単位正方行列}） \quad \cdots \quad ③$$

この時もし行列$A = \left(a_{ij}\right)$が対称行列であれば、余行列式$\tilde{a}_{ij}$からなる行列$\left(\tilde{a}_{ij}\right)$もまた対称行列となる。それゆえ③式は

$$\left(\tilde{a}_{ij}\right) = DA^{-1} \quad , \quad \cdots \quad ④$$

$$\left(\tilde{a}_{ij}\right)A = DE \quad , \quad \cdots \quad ⑤$$

ただし$A = \left(a_{ij}\right)$は対称行列

となる。

● 計量テンソルの余行列式

行列式gの、要素$g_{\mu\nu}$に対する余行列式を$\tilde{g}^{\mu\nu}$とおく。定義により$g_{\mu\nu}$の逆行列は$g^{\mu\nu}$だから、④に対応して

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu} \qquad ⑥$$

となる。また$g^{\mu\nu}$と$g_{\nu\lambda}$を結ぶ条件式

$$\delta^{\mu}{}_{\lambda} = g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda}$$

と⑥より、⑤に対応して次式を得る。

$$\tilde{g}^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = gg^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = g\delta^{\mu}{}_{\lambda}$$

さらに②より、次の関係式を導くことができる。

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \qquad ◆$$