P.40　定理２の証明（§８．テンソル代数）

２個の添字をもった量 $X^{\mu}{}_{\nu}$ を考える。また、共変ベクトル A_{μ} および反変ベクトル B^{ν} を用いて

$$S = X^{\mu}{}_{\nu} A_{\mu} B^{\nu} \qquad ①$$

という量を作ったとき、一般座標変換に対して S の値の不変であることが分かっているとする。そのような条件下での $X^{\mu}{}_{\nu}$ は、その添字が示すタイプの２階混合テンソルである。

（証明） $X^{\mu}{}_{\nu}$ が２階混合テンソルであると仮定（②）して一般座標変換を行う。

$$X'^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} X^{\alpha}{}_{\beta} \qquad ③$$

量 A_{μ}, B^{ν} については、それぞれ共変ベクトルおよび反変ベクトルであることが分かっているから

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} A_{\gamma} \ \cdots\ ④\ , \qquad B'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} B^{\lambda} \ \cdots\ ⑤$$

となる。③～⑤を掛け合わせて整理すると

$$\begin{aligned} X'^{\mu}{}_{\nu} A'_{\mu} B'^{\nu} &= \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} X^{\alpha}{}_{\beta} A_{\gamma} B^{\lambda} \\ &= \delta^{\gamma}{}_{\alpha} \delta^{\beta}{}_{\lambda} X^{\alpha}{}_{\beta} A_{\gamma} B^{\lambda} \quad , \end{aligned}$$

※ $$\begin{aligned} S' &= X'^{\mu}{}_{\nu} A'_{\mu} B'^{\nu} \\ &= X^{\alpha}{}_{\beta} A_{\alpha} B^{\beta} = S \end{aligned}$$

という結果を得る。これは量 S が一般座標変換に対して不変な、つまりスカラー量である、という既知の条件と一致している。また、この結果は仮定②が真であるときにしか成立しない。したがって $X^{\mu}{}_{\nu}$ は、その添字が示すタイプの２階混合テンソルである、という事になる。　◆

上述の考え方を適用すれば、他のタイプのテンソル（例えば $X^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu\lambda}$ ）についても同様の関係が成立することを、容易に理解できるであろう。