P.38　証明問題（§８．テンソル代数）

反変ベクトル A^μ と計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の内積をとってできた B_ν は共変ベクトルである。

$$B_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu \qquad ①$$

［証明］上式の左辺について、B_ν が共変ベクトルであると仮定（②）して一般座標変換を行う。

$$B'_\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} B_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} g_{\beta\alpha} A^\beta \qquad ③$$

右辺についても一般座標変換を行う。

$$g'_{\mu\nu} A'^\lambda = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} g_{\beta\alpha} A^\gamma ,$$

ここで $\mu = \lambda$ とおいて

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} A'^\mu &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} g_{\beta\alpha} A^\gamma \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \delta^\beta{}_\gamma g_{\beta\alpha} A^\gamma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} g_{\beta\alpha} A^\beta \ . \qquad ④ \end{aligned}$$

③と④を見比べると

$$B'_\nu = g'_{\mu\nu} A'^\mu$$

となって、座標変換後も①と全く同じ形の等式が成立する。この結果は仮定②が真であるときにしか成立しない。したがって B_ν は共変ベクトルである、という事になる。　◆