P.34　補足説明（§８．テンソル代数）

定理１、教科書に記載の証明が難解なため、特別な場合について分かりやすく検証。

［検証］任意の２階反変テンソル$T^{\mu\nu}$の一般座標変換は

$$
\begin{aligned}
T'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}T^{\alpha\beta} \\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{0}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}T^{0\beta} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{1}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}T^{1\beta} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{2}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}T^{2\beta} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{3}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}T^{3\beta} \quad . \qquad ①
\end{aligned}
$$

ここで$T^{0\beta}$～$T^{3\beta}$について

$$T^{0\beta} = B^{\beta}{}_{(0)}, \quad T^{1\beta} = B^{\beta}{}_{(1)}, \quad T^{2\beta} = B^{\beta}{}_{(2)}, \quad T^{3\beta} = B^{\beta}{}_{(3)}$$

とおいて反変ベクトルとみなし、これの一般座標変換を考えると

$$B'^{\nu}{}_{(0)} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}B^{\beta}{}_{(0)} \ , \ \cdots \ , \ B'^{\nu}{}_{(3)} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}B^{\beta}{}_{(3)} \quad . \qquad ②$$

一方、反変ベクトル$A'^{\mu}{}_{(i)}$を次のように定義する。

$$
\left.
\begin{aligned}
A'^{\mu}{}_{(0)} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}}A^{\gamma}{}_{(0)} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{0}} \qquad [\text{ただし } A^{\gamma}{}_{(0)} = \delta^{\gamma}{}_{0}] \\
&\cdots\cdots \\
A'^{\mu}{}_{(3)} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}}A^{\gamma}{}_{(3)} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{3}} \qquad [\text{ただし } A^{\gamma}{}_{(3)} = \delta^{\gamma}{}_{3}]
\end{aligned}
\right\} \qquad ③
$$

②，③を①に代入して、次の関係式を得る。

$$
\begin{aligned}
T'^{\mu\nu} &= A'^{\mu}{}_{(0)}B'^{\nu}{}_{(0)} + A'^{\mu}{}_{(1)}B'^{\nu}{}_{(1)} + A'^{\mu}{}_{(2)}B'^{\nu}{}_{(2)} + A'^{\mu}{}_{(3)}B'^{\nu}{}_{(3)} \\
&= \sum_{i=0}^{3} A'^{\mu}{}_{(i)}B'^{\nu}{}_{(i)}
\end{aligned}
$$

また上式を元の座標系について書き表した

$$T^{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{3} A^{\mu}{}_{(i)}B^{\nu}{}_{(i)}$$

が成立することは、$A^{\mu}{}_{(i)}$および$B^{\nu}{}_{(i)}$に成分値を代入すれば、すぐに分かる。このように、任意の２階反変テンソルを２つの反変ベクトルのテンソル積として表す場合、全部で４項必要となることが分かる。

任意の３階反変テンソルについても同様の議論を適用できる。その結果は

$$T'^{\mu\nu\rho}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}}T^{\alpha\beta\gamma}\text{，ここで}$$

$$T^{ij\gamma}=B^{\gamma}{}_{(ij)}\text{，}\quad\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{i}}=A'^{\mu}{}_{(i)}\text{，}\quad\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{j}}=A'^{\nu}{}_{(j)}\quad\text{と置いて}$$

$$T'^{\mu\nu\rho}=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}A'^{\mu}{}_{(i)}A'^{\nu}{}_{(j)}B'^{\rho}{}_{(ij)}$$

となって、全部で１６項からなるテンソル積の和として表されることが分かる。

２階テンソルの場合は$4=4^{1}$項、３階テンソルの場合は$16=4^{2}$項が、必要となる。これより任意のn階反変テンソルをテンソル積の和として表す場合、全部で4^{n-1}項、必要となることが分かる。　◆