P.31　$g^{\mu\nu}$が２階反変テンソルであることの証明（§7．スカラー,ベクトル,テンソル）

（証明）本文記載の定義および$\delta^{\mu}{}_{\nu}$の一般座標変換から

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = g'^{\mu\lambda} g'_{\lambda\nu} \quad ,$$

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \delta^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} \quad ,\text{　これより}$$

$$g'^{\mu\lambda} g'_{\lambda\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} \quad . \qquad ①$$

一方、$g_{\mu\nu}$の一般座標変換は

$$g'_{\lambda\nu} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\gamma\beta} \qquad ②$$

で表される。また$g^{\mu\nu}$が２階反変テンソルであると仮定すれば

$$g'^{\mu\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} g^{\alpha\rho} \qquad ③$$

が成り立つはずである。②と③を掛け合わせて

$$g'^{\mu\lambda} g'_{\lambda\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} g^{\alpha\rho} g_{\gamma\beta} \quad , \qquad ④$$

ここで

$$\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} = \delta^{\gamma}{}_{\rho} = \begin{cases} 1 & (\gamma = \rho) \\ 0 & (\gamma \neq \rho) \end{cases}$$

だから、④は

$$g'^{\mu\lambda} g'_{\lambda\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta}$$

となって①と同じ結果を得る。この結果は仮定③が真であるときにしか成立しない。したがって、$g_{\mu\nu}$の逆行列成分$g^{\mu\nu}$は２階反変テンソルである、ということになる。　◆