Ｐ．２６　補足説明（§６．４次元連続体）

$$g(x)\overset{d}{\equiv}\det\left(g_{\mu\nu}\right)=\begin{vmatrix} g_{00} & \cdot & \cdot & g_{03} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{30} & \cdot & \cdot & g_{33} \end{vmatrix}$$ とおくとき、Ω内のすべての点で

$g(x)<0$ である。

（証明）

４つの行列 I,N,J,G を次のように設定する。

$$I=\left(I_{\mu\alpha}\right)=\left(\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right),\quad N=\left(\eta_{\alpha\beta}\right),$$

$$J=\left(J_{\beta\nu}\right)=\left(\frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right),$$

$$G=\left(g_{\mu\nu}\right)=\left(\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right)=\left(\frac{\partial X^{0}}{\partial x^{\mu}}\eta_{00}\frac{\partial X^{0}}{\partial x^{\nu}}+\cdots+\frac{\partial X^{3}}{\partial x^{\mu}}\eta_{33}\frac{\partial X^{3}}{\partial x^{\nu}}\right)$$

積 IN は

$$IN=\begin{pmatrix} \frac{\partial X^{0}}{\partial x^{0}} & \cdot & \cdot & \frac{\partial X^{3}}{\partial x^{0}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X^{0}}{\partial x^{3}} & \cdot & \cdot & \frac{\partial X^{3}}{\partial x^{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial X^{0}}{\partial x^{0}}\eta_{00} & \cdot & \cdot & \frac{\partial X^{3}}{\partial x^{0}}\eta_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X^{0}}{\partial x^{3}}\eta_{00} & \cdot & \cdot & \frac{\partial X^{3}}{\partial x^{3}}\eta_{33} \end{pmatrix}$$

積 INJ は

$$INJ=(IN)J$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial X^0}{\partial x^0}\eta_{00} & \cdot\ \cdot & \frac{\partial X^3}{\partial x^0}\eta_{33}\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \frac{\partial X^0}{\partial x^3}\eta_{00} & \cdot\ \cdot & \frac{\partial X^3}{\partial x^3}\eta_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial X^0}{\partial x^0} & \cdot\ \cdot & \frac{\partial X^0}{\partial x^3}\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \frac{\partial X^3}{\partial x^0} & \cdot\ \cdot & \frac{\partial X^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial X^0}{\partial x^0}\eta_{00}\frac{\partial X^0}{\partial x^0}+\cdots+\frac{\partial X^3}{\partial x^0}\eta_{33}\frac{\partial X^3}{\partial x^0} & \cdot\ \cdot & \frac{\partial X^0}{\partial x^0}\eta_{00}\frac{\partial X^0}{\partial x^3}+\cdots+\frac{\partial X^3}{\partial x^0}\eta_{33}\frac{\partial X^3}{\partial x^3}\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \frac{\partial X^0}{\partial x^3}\eta_{00}\frac{\partial X^0}{\partial x^0}+\cdots+\frac{\partial X^3}{\partial x^3}\eta_{33}\frac{\partial X^3}{\partial x^0} & \cdot\ \cdot & \frac{\partial X^0}{\partial x^3}\eta_{00}\frac{\partial X^0}{\partial x^3}+\cdots+\frac{\partial X^3}{\partial x^3}\eta_{33}\frac{\partial X^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}$$

$$=(g_{\mu\nu})=G$$

結局、行列 G は３つの行列 I,N,J の積として表すことができる。

$$G=INJ$$

上式より $g(x)$ は

$$g(x)=|G|=|INJ|$$

I,N,J はそれぞれ４次の正方行列なので、上式は次のように書き直すことができる。

$$g(x)=|I|\cdot|N|\cdot|J|$$

ここで $\eta_{\alpha\beta}$ の定義より $|N|=-1$ となるから

$$g(x)=-|I|\cdot|J|$$

さらに I は J の転置行列 $(I=J^T)$ なので、行列式 $|I|$ と $|J|$ は同じ値になる。よって

$$g(x)=-\left|J^T\right|\cdot|J|=-|J|^2=-\left\{\frac{\partial(X)}{\partial(x)}\right\}^2$$

ここでヤコビの行列式 $|J|$ が正負のいかなる値をとろうとも、その自乗 $|J|^2$ は必ず正となるから、結局 $g(x)<0$ となる。　◆