現実的な問題解決のための新しい教授プログラムの試み
－文章題を解く際に必要な現実世界の知識に関連して－

竺沙　敏彦
兵庫教育大学大学院学校教育研究科
京都府公立中学校教諭

0. はじめに

算数・数学（以下，数学と記す）の授業において，児童・生徒（以下，生徒と記す）はしばしば次のような疑問を口にする。

「数学を学習して，何の役に立つのですか？」

これまで，数学教育に携わってきた教師は様々な取り繕いをしながら，この素朴な疑問を払い除けようとしてきた。一昔前までなら，例えば「受験に必要」や「日常生活に欠かせない」等の理由で生徒は（少なくとも表面的には）納得していた。しかし，最近の数学離れの現状を鑑みるに，我々数学教育に携わる者は今一度上記の疑問に対して再考する必要があるのではないだろうか。

このような課題に示唆を与えてくれる論文として，本稿では Verschaffel. L, & De Corte, E.(1997)の『Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders.（初等学校において現実的な数学的モデリングを教えること：５年生での教授実験）』を紹介する。

文章題はどのような目的を達成するために数学の教科書に登場し，また授業で扱われているのであろうか。一つは計算（例えば四則演算）の練習問題としての役割，もう一つには，現実の問題（課題）を数学を利用して解決する練習問題としての役割であろう。Verschaffel らは，後者の役割に着目し，文章題を解く際に必要な生徒の姿勢（disposition）を生徒に身に付けさせる教授法を実践し成果を上げている。

1. 問題解決における過程

人々は日々，現実世界における問題（課題）を解決しながら生活している。Verschaffel らによれば，初等学校のカリキュラムの中で数学が重要視されてきた理由の一つとして数学の実用性がある。実用性とは，数学は現実世界の様々なシステムの振る舞いを記述・分析・予測するための道具に成り得るということである。また，応用問題としての文章題は，日常生活における様々な問題解決に際して，いつ・どのように数学を適用するかを判断する生徒の能力を発達させる目的で使用されているとのことである。

数学を利用して現実の問題を解決する過程には様々な段階（プロセス）が存在するが，Verschaffel らは，次の５段階を同定している。

①　問題状況を理解すること
②　数学モデルを構成すること
③　数学モデルを操作すること
④　計算結果を現実的に解釈し評価すること
⑤　結果を理解しあうこと

この５段階はいずれの段階も問題解決のためには重要である。しかし，現在の学校数学においては①～③の段階はかなり重要視して指導を行っているが，④や⑤の段階の指導はそれほど力を入れて

いるとは言えないのが現状ではなかろうか。

2. 文章題に対する現実的な解答

問題解決過程において，生徒たちが現実世界の知識を正しく使用しなかったり，解釈に誤りがある状況が頻繁に観察されることは，多くの先行研究で述べられている。その一例として，Carpenterら(1983)によれば，Third National Assessment of Educational Progress で出題された以下の問題に現実的に答えることができた 13 歳の生徒はわずか24%であった。

「１台の軍用バスに 36 人の兵士が乗ることができる。1128 人の兵士がトレーニング場にバスで行くとすると，何台のバスが必要になるか。」

「1128÷36」を立式し（上述の問題解決過程における第２段階），「31 と 1/3」または「31 あまり 12」と正しく計算できた（同，第 3 段階）生徒のうち，約３分の２の生徒は「31 と 1/3 台」や「31台」と実際には 1128 人の兵士を運ぶことができない非現実的な解答を行っていた。これは第４段階において「バスの台数は整数値である」という現実的な知識を考慮せず，誤った解釈を行った例といえる。この文章題に対する現実的な解答は，第３段階で求められた「31 と 1/3」または「31 あまり 12」を第４段階において現実の制約を考慮した「32 台」である。

また，Greer(1993)は 13 歳の生徒に次の問題を与え，非現実的な解答をする生徒が多いことを確認した。

「ある競技者の１マイルのベストタイムは４分７秒である。彼が３マイル走るのにどのくらいかかるか。」(p.244)

被験者の約 90%が数学モデルとして正比例モデルを利用して答を求めた。つまり，４分７秒を３倍して「12 分 21 秒」と解答した。しかし，これは「人が１マイルのベストタイムで３マイルを走り続けることはできない」という現実の制約を無視した答である。

3. Verschaffel らの教授プログラム

3.1. 教授プログラムの概要

Verschaffel らは，生徒の現実的な数学的モデリング遂行能力を高めるために，以下に述べる教授プログラムを計画し約２週間半の期間をかけて実行した。彼らの教授プログラムは３つの柱（教材（文章題）・教授法・教室文化）から構成されていた。一つ目の柱である教材・題材としての文章題は，伝統的な数学教室において用いられてきた定型の文章題ではなく，非定型の文章題であった。定型の文章題とは，例えば「12 個の風船を４人で分ける。一人当たり何個になるか。」という問題のように，算術演算(12÷４)の結果である「３」をそのまま答えとすることが妥当な問題であり，非定型の文章題とは，例えば，「10 個の風船を４人で分ける。一人当たり何個になるか。」という問題のように，算術演算(10÷４)の結果である「２.５」をそのまま答えとすることが非現実的であるような問題である。彼らは，こうした非定型の文章題を扱うことにより，生徒の中に二つの反応，つまり機械的に処理した非現実的な反応と日常の知識を活用した現実的な反応が生じ，これら二つの反応を引き合いに出すことによって，数学の文章題解決における日常の知識の役割についての生徒の信念を意図的に修正させる認知の葛藤が生じるであろうと期待した。

Verschaffel らが使用した５種類の非定型の文章題とその一例を紹介する。

①余りのある割り算問題の結果を解釈するときに現実世界の知識の適切な使用と現実的な考慮が必要な文章題

「1180 人のサポーターがサッカー場にバスで移動しなければならない。バスは 48 人乗りである。バスは何台必要か。」

②共通の要素を持つ二つの集合の合併または分離に関する文章題

「Carl と George はクラスメイトである。Carl は自分の誕生日に招きたい友人は９人で，George は 12 人である。Carl と George は同じ誕生日なので，一緒にパーティーをすることにしている。彼らは友人を全員招待し，全員が来ることになっている。パーティーには何人の友人が来るか。」

③計算結果に＋１または－１した値が適切な答に

なる文章題
「毎年恒例のロックフェスティバルは今年 2000 年で 15 回目である。最初に開かれたのは何年のことか。」
④問題文中に明示されていないが，基本的・常識的な知識を考慮に入れなければならない文章題
「ある人が 12m離れたポールの間を張るのに必要な長さのロープを必要としている。しかし，彼は１.５mの長さのロープの束しか持っていない。ポールの間をロープを結んでいくと何本のロープが必要か。」
⑤正比例モデルが数学モデルとして不適切な問題
「Sven は平泳ぎで 50m泳いだときのベストタイムは 54 秒である。彼が 200m泳ぐと何秒かかるか。」

二つ目の柱つまり教授法はグループ活動とクラス全体討議である。日本の先生方はこれらが教授プログラムの柱になっていることに驚かれるかもしれない。グループ活動やクラス討議は中学校ではかなり少なくはなるものの，日本の小学校においては特に目新しい教授法とは言えない。しかし，アメリカの伝統的な授業の多くは教師が一方的に知識や手法を提示するだけで日本で一般的に行われているような教師と生徒の相互作用は殆ど無いそうである。つまり，日本型の授業（Verschaffel らはおそらく意識していないであろうが）と理解していただいて差し支えないと思う。Verschaffel らは，こうしたグループ活動・クラス討議を通して，生徒間で相互に作用し合い，それによって生徒の中に故意に認知の葛藤・内省・認知の変化を起こすことを意図した。

最後の柱は教室文化である。これは構成主義とも関連するが，Verschaffel らは大切なこととして次の４つの話題について生徒が新しい見解と信念（括弧内はその一例）を発達させるような新しい教室文化を創り出す授業を行おうとした。

《大切なこととして，
・よい問題とはどのようなものか。
（「文章題の唯一正しい解釈や唯一の正解などは滅多にあるものではない。」）
・よい解決方略はどのようなものか。
（「解決の際に現実的な考慮を行うことは有意義である。」）
・よい解答とはどのようなものか。
（「正確な値よりも概算した方がよい場合もある。」）
・よい説明とはどのようなものか。
（「計算方法の説明だけではなく，その演算を選択した理由を説明する。」）》(pp.580)

Verschaffel らは，上述のような教授プログラムは，現実世界の知識と数学の学習を切り離すという傾向を改善したり，学校においてより現実的な数学的モデリングへと目を向けさせることや文章題の解釈を発達させることに役立つと指摘している。

3.2. 教授プログラム以前の生徒の実態

教授プログラムの前後で生徒の実態がどのように変化するかを調べるために，Verschaffel らは教授プログラム開始前に事前テストを行っている。調査問題は前述した５種類の非定型の文章題を各種類ごとに２問ずつ含む計 10 問で構成された。その結果は他の先行研究と同様に現実的な解答は少なかった。

3.3. Verschaffel らの仮説と問題点

Verschaffel らは事前テストによって掴んだ生徒の実態を踏まえ，教授実験にあたって次の３つの仮説を設定した。
（仮説１）教授プログラムを受けた生徒は，事後のテストにおいて現実的な解答が増加する。
（仮説２）仮説１は授業で使用された文章題だけではなく，類似した他の問題においても成り立つ。
（仮説３）仮説１・仮説２の効果は持続する。
さらに，研究に当たって次の３つの問題点を挙げている。
（問題点１）実験プログラムは生徒の能力と関係なく有効か。
（問題点２）実験プログラムは全ての文章題に対して有効か
（問題点３）実験プログラムにおいてどのような困難点が存在したか。
以上の仮説および問題点について，調査結果を基

に分析を行っている。

3.4. 教授プログラムの成果

まず，３つの仮説について，それぞれ次のように結論づけている。

仮説１については，事前テストにおいて現実的な解答はわずか７％にすぎなかったのに対して，事後テストにおいては 51%にまで増加した。これは統制群の伸び（20%→28%）と比較して有意であった。

仮説２については，授業で使用された文章題の方が現実的な解答を行う割合は多かったが，類似した他の問題においてもその割合は確実に増加していた。

仮説３については，事後テストを行ったのが一部のクラスだけであったため，統計的に有効なデータは収集できなかったけれども，教授プログラム終了一ヶ月後に事後テストと同様のテストを行った結果から，Verschaffel らは教授実験の効果は持続すると結論づけている。

これら三つの仮説に対する結果および分析を総合して，この教授実験は効果があったと結論づけている。

また，三つの問題点に対するコメントも行っている。実験プログラムの効果が生徒の能力によって変化するかという問題点１については，能力の高い生徒に最も効果的であったとしている。この原因として考えられることとして，グループ活動においての関与の仕方の違いに着目している。つまり，能力の低い生徒と比較して能力の高い生徒はグループ活動に積極的に参加している。このことが，上記の結果になったのではないかと指摘している。

問題点２については，問題のタイプによって教授プログラムの効果に差が生じた。つまり，前述した５つの文章題の分類の中で「①余りのある割り算問題」では非常に高い割合で現実的に解答したのに対して，「③計算結果に＋１または－１した値が適切な答になる文章題」や「⑤正比例モデルが数学モデルとして不適切な問題」においては現実的な解答は比較的増加幅が小さかった。

問題点３については，生徒に与えられた文章題について次のように触れている。文章題を解く際に現実世界の知識を活用して解く必要はあるが，学校数学の中の応用問題においては文脈を土台とした考慮には限界があることが避けられない。つまり，学校数学の授業において現実の制約を無視したりある部分を考慮に入れないということは，数学としての問題を解く際には必要になるということである。

4. 結語

Verschaffel らの行った教授プログラムは，生徒を現実的な問題解決者へと育成することについて一定の成果を上げた。裏を返せば最初に指摘した非現実的に解答する生徒が多いという実態は，学校教育における指導がその原因と言わざるを得ない。それに関わって Verschaffel らは最後に以下のように述べている。

> 《実験プログラムは通常の数学の授業とは別に編成された一連の TLU(教授学習単位：単元の意味)で構成した。(中略)数学カリキュラムにおける特別の TLU の履行を我々は主張している訳ではないことを明示しておく。(中略)それどころか，文章題に対して現実的な数学的モデリングと現実的な解釈へ向かう気質を発達させることは，最初から全カリキュラムに浸透するべきである。》（pp.597）

5. 参考文献

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W., & Silver, E. A. (1983). Results of the Third National Assessment of Educational Progress mathematics assessment: Secondary school. Mathematics Teacher. 76, pp.652-659

Greer, B.(1993) The mathematical modeling perspective on wor(l)d problem. *Journal of mathematical behavior*, 12, pp.239-250

Verschaffel, L. & De Corte, E.(1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders, *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol.28, No.5, pp.577-601