

文章題解決における解の吟味に関する調査

兵庫教育大学大学院 竺沙 敏彦

1. はじめに

最近、中学校の数学の授業に課題学習が取り入れられるようになった。従来の文章題と比較すれば現実状況に近い問題を扱っているとはいえ、多くの場合現実の問題を扱っているとは言い難いのが現状である。

現実の問題を解決ために数学を利用する数学的モデリングが最近の話題の一つとなっている。W.Blumら(1989)や池田ら(1993)の研究を参考に数学的モデリングの過程を図式化すると、図1のようになる。従来の文章題は、上の図で「現実モデル」にあたると考えられ、文章題指導は「定式化」、「数学的処理」、「解釈・吟味」の3つの過程を一度だけ行う作業を生徒に要求してきた。しかし、現実の問題では、教科書にある文章題のように考慮に入れるべき諸条件が整理されていない。そのため、現実の問題を解決するためには、現実の事象から条件整理を行って現実モデルを作成する過程が必要となる。現実モデルを作成する場合の条件整理は条件を少なくすれば数学モデルが単純なものになり、数学的処理が容易になるが、出てきた結果が現実と乖離したものとなる可能性が高くなる。しかし、条件を増やせばより現実に近い結果が出ることが期待できる一方で、数学的処理が困難なものとなる。そこで、条件の内容や量を適切に選択し、数学的処理が比較的容易でありながら出てきた結果が現実的に利用できるようにしなければならない。そのためには、数学的モデリングの過程は一巡させるだけではなく、数学的結果の解釈・吟味を行い現実の事象と比較することによって現実モデルあるいは数学モデルを修正し、繰り返し数学的モデリングを行うことが重要になってくる。

このモデルの修正のためには数学的結果を現実の事象に解釈し吟味する作業が非常に重要になってくる。しかし、現在の中学校の文章題指導では数学的結果の解釈・吟味はあまり重要視されていない。そこで本稿では、中学生が文章題に対してどの程度現実の制約を考慮して数学的結果を解釈し吟味を行うのかを調査した結果を報告し、若干の考察を行う。

なお本稿では、数学モデルを数学的に処理をした数学的結果を「解」、解を解釈・吟味して現実の世界に適用させたものを「答」と呼ぶ。また、解を現実の制約を考慮して答を導くことを「修正(adjustment)する」と言うことにする。

2. 解の吟味に関するGreerの研究

Greer(1993)は、子供達は文章題を解くときに現実世界の制約を考慮して解を吟味するトレーニングを受けていないことが多いと述べている。

解の吟味の段階において、数学的な解をそのまま現実の答として適用すると現実世界の制約を無視した答になる文章題として、Greer(1993)は次のような例を引用している。

《17人が9日間で2軒の家を建てる。では、20人で5軒の家をたてるとすると何日かかるか。》(p.239)

この問題の一般的な答は「19日と3時間」である。しかし、この答を受け入れるためには以下のような文章題に書かれていない前提条件が必要となる。

- 2軒の家を建てる場合でも5軒の家を建てる場合でも、生産性が同じであること
- どちらの場合も各人(17人または20人)の生産性が同じであること
- 全員が同じペースで働き続けること
- 全員が一日24時間働き続けること

～ は、この問題の状況を正比例モデルと考えて数学モデルを作る為の前提条件であり、 は数学的な解（[かかる日数] = 19と1/8日）を解釈する際の前提条件となる。この全ての条件は現実の制約を無視した条件といえよう。またGreer(1993)は、前提条件が現実世界においても不自然でない問題の例も挙げている。

《銀行は1ポンドにつき2.81ドイツマルクのレートで両替をする。60ポンド得るためには何ドイツマルクいるか。》(p.240)

この問題は最初の例と比較すると、正比例モデルが適正な数学モデルになる。

Greer(1993)は、13, 14歳の生徒に様々な文章題を与えて現実の制約を無視した解答をすることを確認した。現実の制約を無視する生徒が多かった問題例として、次の二つの問題があげられる。

《問題4：ある競技者の1マイルのベストタイムは4分7秒である。彼が3マイル走るのにどのくらいかかるか。》(p.244)

《問題2：ある人が12m離れた2本のポールの間を結ぶための十分な長さのロープを必要としている。しかし、彼は1.5mのロープだけを何本か持っている。そのポールの間を結ぶために必要なロープは何本か。》(p.243)

一つ目の問題に対して、被験者の約90%が数学モデルとして正比例モデルを利用して答を求めた。つまり、4分7秒を3倍して「12分21秒」と解答したと思われる。しかし、これは「人が1マイルのベストタイムで3マイルを走り続けることはできない」という現実の制約を無視した答である。

二つ目の問題においては、被験者の約87%が $12 \div 1.5$ の計算結果（解）である「8」をそのまま答として「8本」と答えた。しかし、実際にロープを結ぶと、結び目に使用した分だけロープ全体の長さは短くなっていく。つまり1.5mのロープ8本を結んでもその長さは12mよりは短くなるという現実の制約を考慮していない生徒がほとんどであった。

3. 調査の概要

数学的モデリングを通して現実の問題を解決するには解の解釈・吟味の段階が重要である。しかし、Greer(1993)によればそれが不十分な生徒が多い。そこで、日本の中学生は現実的な問題の解決に際して、その状況の制約をどの程度考慮することができるのか調べてみる。

(1) 調査目的

文章題を解くときに、生徒は文章題の意味している現実的状况をどの程度考慮するのかを調べる。

(2) 調査問題

数学的な解をそのまま修正なしに現実世界の答として適用することが妥当な問題（A問題）と、現実場面を考慮したとき解を修正する必要がある問題（B問題）をそれぞれ6問作成した（表1）。

表1 調査に使用した文章題

	A問題	B問題
問題1 リボン問題と 風船問題	リボン問題： 10mのリボンを4人で分けると、一人あたり何mになりますか。	風船問題： 10個の風船を4人で分けると、一人あたり何個になりますか。
問題2 製品製造問題と 箱詰問題	製品製造問題： ある工場で、260個の製品を作ることになりました。その工場では1時間あたり40個ずつ作ることができます。何時間で製品をそろえることができますか。	箱詰問題： ある工場で、260個の製品を箱詰めすることになりました。一箱40個入りの箱に詰めていくことにすると、箱はいくつ必要になりますか。
問題3 貯金問題	Aは7100円、Bは3150円の貯金があります。来月から2人とも、毎月100円ずつ貯金すると、Aの貯金がBの貯金のちょうど2倍になるのは何ヶ月後でしょうか。ただし、貯金の利息は考えないことにします。	Aは7150円、Bは3150円の貯金があります。来月から2人とも、毎月100円ずつ貯金すると、Aの貯金がBの貯金のちょうど2倍になるのは何ヶ月後でしょうか。ただし、貯金の利息は考えないことにします。

問題4 二次方程式の問題	長さ20cmのひもを使って長方形を作ったところ、その面積は 9cm^2 になった。この長方形の縦の長さを求めなさい。	正方形の縦の長さを2cm、横の長さを8cm短くした長方形を作ると、その面積は 7cm^2 になった。もとの正方形の一辺の長さを求めなさい。
問題5 仕事問題	ある畑を一人で耕すと1時間で 4m^2 耕すことができる。では、60人で7月1日の正午に作業を始めると、 1200m^2 の畑を耕し終えるのは何月何日の何時になるか求めなさい。	ある畑を一人で耕すと1時間で 4m^2 耕すことができる。では、6人で7月1日の正午に作業を始めると、 1200m^2 の畑を耕し終えるのは何月何日の何時になるか求めなさい。
問題6 追いつき問題	弟が家を出てから10分たって、兄が同じ道を追いかけてきた。弟の歩く速さを毎分80m、兄の速さを毎分240mとすると、兄は出発後何分で弟に追いつくでしょう	弟が家を出てから10分たって、兄が同じ道を追いかけてきた。弟の歩く速さを毎分240m、兄の速さを毎分80mとすると、兄は出発後何分で弟に追いつくでしょう。

(3)調査方法

被験者：京都府公立中学校第3学年2学級計64名

調査時間：35分間

調査方法：表2のように、2種類の調査用紙を作成し、被験者にはどちらか一方の調査用紙が配布された。各グループ（各32名）は、学力に差はなかった。

表2 調査用紙の問題順

問題	用紙	用紙
1：リボン問題と風船問題	A問題	B問題
2：製品製造問題と箱詰問題	B	A
3：貯金問題	A	B
4：二次方程式の問題	B	A
5：仕事問題	A	B
6：追いつき問題	B	A

4.調査結果とその分析

4.1.問題ごとの結果と分析

各問題ごとに、生徒がどのように答えたかを表にまとめ、分析を行う。

問題1：リボン問題と風船問題

表3 問題1：リボン問題と風船問題

答	リボン問題(人)	風船問題(人)
2.5	29	13
2	0	17
その他	1	2
無答	1	0
白紙	1	0
合計	32	32

風船問題（B問題）において、被験者32人中13人が「2.5」という解を修正することなしにそのまま「2.5個」と解答している。それに対して、32人中17人が「2.5」という解を修正して「2個」と解答している。なお、「その他」

は計算間違いである。

「無答」は何らかの内容を記述してはいるが、答を書いていない生徒であり、「白紙」は何も書いていない生徒である（以下同様）。

問題 2：製品製造問題と箱詰問題

表4 問題 2：製品製造問題と箱詰問題

答	製造問題(人)	箱詰問題(人)
6.5	25	8
7	2	14
6	0	3
6箱と5個		1
その他	5	3
無答	0	1
白紙	0	2
合計	32	32

箱詰問題（B問題）において、被験者32人中8人が「6.5」という解を修正せずに「6.5箱」と答えた。それに対して、「7箱」、「6箱」、「6箱と5個」と答えた生徒は「6.5」をそのまま答とせずに解の修正を行った。つまり被験者32人中18人が解の修正を行った。「その他」は「65」や「60.5」などの計算間違いである。

問題 3：貯金問題

表5 問題 3：貯金問題

A問題		B問題	
答	人数	答	人数
8ヶ月後	11	8.5ヶ月後	8
9ヶ月後	3	2倍にはならない	6
		9ヶ月後	1
		8ヶ月後	1
その他 12ヶ月後 7ヶ月後	2	その他 7.5ヶ月後 8ヶ月と5日後 40ヶ月後	3
無答	5	無答	8
白紙	11	白紙	5
合計	32	合計	32

筆者は、この問題を作成した段階では多くの生徒が方程式を利用して解を求めると考えていた。しかし、実際には生徒は解決手段として表の利用、計算、方程式による解決と様々な手段を使用している。ところが、表を利用したり、計算をした生徒の解答からはどの段階で解の修正が行われているのか判断することが困難である。例えば表を利用した場合、表から「ちょうど2倍になるときはならない」ということを読みとることができ、現実的な制約を考慮したかどうか判断できない。

そのため、このB問題に関しては、「 $7150 + 100x = 2(3150 + 100x)$ 」等の方程式を立式し、 $x = 8.5$ を求めた後に答を書いている生徒のみを抽出し分析を行う（表6）。

表6 B問題で解を「8.5」と求めた生徒の答

答	人数
8.5ヶ月後	8
2倍にはならない	1
9ヶ月後	1
8ヶ月後	1
8ヶ月と5日	1
合計	12

B問題で「8.5」と正しく解を求めることができた12人中8人が解の修正を行わず「8.5ヶ月」と解答した。残りの4人は何らかの修正を行った。

問題4：二次方程式の問題

表7 問題4：二次方程式の問題

答	A問題(人)	B問題(人)
1 cmと9 cm	11	0
1 cm	10	1
9 cm	3	17
その他	3	8
無答	4	3
白紙	1	3
合計	32	32

問題3と同様の理由で、B問題において「 $(x-8)(x-2)=7$ 」等と二次方程式を立式し、解 $x=1, 9$ を求めた生徒のみを抽出する(表8)。なお、「その他」は「10」等の計算間違いである。

表8 B問題で解「 $x=1, 9$ 」を求めた生徒の答

答	人数
1 cmと9 cm	0
9 cm	12
合計	12

「 $x=1, 9$ 」と正しく解を求めた12人全員が解の修正を行い、「9 cm」と答えた。

問題5：仕事問題

表9 問題5：仕事問題

A問題		B問題	
答	人	答	人
7月1日午後5時	19	7月3日午後2時	16
その他	4	その他	11
7月12日12時		7月3日午前10時	
7月1日午後4時		7月1日12時30分	
7月3日夜12時		7月2日午前8時	
		7月3日午後3時	
		7月4日2時	
		8月21日12時	
		7月12日10時	
		7月13日午後5時	
		7月13日午前0時	
無答	3	無答	3
白紙	6	白紙	2
合計	32	合計	32

B問題において答を記述した27人のうち16人が「7月3日午後2時」と解を修正することなしに解答した。また、残りの11人は50時間を日数に換算する際に誤りを犯しただけで、これらの生徒も解の修正は行っていない。つまり答を記述した全員が解の修正を行わなかった。

問題6：追いつき問題

表10 問題6：追いつき問題

A問題		B問題	
答	人数	答	人数
5分	12	-15分	1
追いつけない	1	追いつけない	7
		-15分,追いつけない	1
その他	7	その他	9
無答	0	無答	1
白紙	12	白紙	13
合計	32	合計	32

問題3, 4と同様の理由で, 方程式を利用し解を正しく求めた生徒のみを抽出する(表11)。なお, 「その他」は3分, 30分, 13分などの答である。

表11 B問題で解「 $x = -15$ 」を求めた生徒の答

答	人数
-15分	1
追いつけない	3
合計	4

方程式を利用し, 「 $x = -15$ 」と解を求めた生徒を対象に分析を試みた。ところが, 対象者が4人と少なかったため一般的な傾向を読みとることは難しい。表11の「追いつけない」と答えた3人は方程式の解として「 $x = -15$ 」を出したあとで解の修正を行っている。

4.2.問題による修正の割合の違い

生徒が解の修正を行う割合は問題によって差が生じた。解を正しく求めた生徒が4人と少なかった問題6を除いて, 問題ごとの修正の割合を表12にまとめた。

表12 B問題において生徒が解を修正した割合

問題	修正の割合(%)
1. 風船問題	57 (17/30)
2. 箱詰問題	69 (18/26)
3. 貯金問題	33 (4/12)
4. 二次方程式の問題	100 (12/12)
5. 仕事問題	0 (0/27)

このように問題によって修正の割合に差が生じたことについて, 二つの原因を指摘する。

Saljo(1991)は, 文章題には書かれていない前提条件が存在していることを指摘している。今回の調査問題のB問題については, 表13のような書かれていない前提条件が存在しているものと考えられる。

表13 B問題の書かれていない前提条件

問題	書かれていない前提条件
1: 風船問題	風船の個数は整数値である
2: 箱詰問題	箱の個数は整数値である 余った製品のためにも1箱必要になる
3: 貯金問題	月数は整数値である
4: 二次方程式の問題	もとの長さは切り取った長さより長い
5: 仕事問題	人は50時間不眠不休で作業を行うことはできない
6: 追いつき問題	追いつくまでの時間は正である

このように文章題には様々な書かれていない前提条件が存在するが, その条件には生徒が気づきやすい条件と気づきにくい条件があり, これが問題によって解の修正の割合に差を生じさせている原因の一つと思われる。例えば,

問題 1, 2, 5 において, 問題 5 は解の修正を行った生徒はいなかったのに対して, 問題 1, 2 は解の修正を行った生徒の割合が高かった(表12)。問題 1, 2 の「風船や箱は0.5個や0.3箱のように分割できない」ということに生徒は気づきやすいが, 問題 5 の「人が50時間不眠不休で作業を行うことが現実味を持たない」ということには気づきにくく, この違いが解の修正の割合に差を生じさせたと考えられる。また, 問題 5 では, 上記のことに気づいていたとしても, どのように解を修正してよいかかわからず, 仕方なく解を修正せずに答えたということも考えられる。

次に, 問題 3 と問題 4 の間で解の修正の割合に差が生じたことに関しては, 一次方程式を利用する文章題と二次方程式を利用する文章題との学習経験の違いが, その原因として考えられる。ある教科書では, 一次方程式を利用して解く文章題の殆どは数学的に処理した唯一の解をそのまま答とする問題であるのに対して, 二次方程式を利用して解く文章題は解が二つ求まり, うち一つだけを答とする問題が多い。実際の指導においても, 二次方程式を利用する問題 4 の B 問題のようなタイプの問題は練習させるが, 一次方程式を利用する問題 3 の B 問題のようなタイプの問題の練習はあまりさせていない。つまり, 生徒は二次方程式を利用した問題について解の吟味の練習をしているが, 一次方程式を利用した問題については解の吟味の練習をほとんどしていない。このことが問題 3 と問題 4 の間の解の修正の割合に差を生じさせる原因として考えられる。

5.まとめ

Greer(1993)と同様に, 日本の中学生においても文章題を解くときに現実の制約を考慮せずに解をそのまま答とする場合があることが今回の調査においてわかった。しかし, 前述したように数学的モデリングの学習においてモデリングの過程を何度も循環させるためには解の吟味を適切に行う能力が必要となる。その能力を育成するために数学の授業において, 生徒にとって真に現実味があり答が正しいかどうかを実際に検証することの必要性を生徒が実感できる問題の開発が今後の課題となる。

6.参考文献・引用文献

- Blum,W., & Kirsch, A.(1989). "The problem of the graphic artist.", In W. Blum.(Eds.), *British library cataloguing in publication data., Ellis horwood limited, (pp.129-125), England.*
- Greer, B.(1993). "The mathematical modeling perspective on wor(l)d problem.", *Journal of mathematical behavior, 12, pp.239-250*
- Greer, B.(1997). "Modelling reality in mathematics classrooms: the case of word problems", *Learning and Instruction, Vol.7, No.4, pp.293-307*
- Mayer, R. E.(1982). "Memory for algebra story problems". In Ball. S.(Eds.), *Journal of educational psychology., 74, No.2, American Psychological Association, Inc., (pp.199-216), Washington, D. C.*
- Saljo, R.(1991)."Learning and mediation: Fitting reality into a table.", *Learning and Instruction, Vol.1, pp.261-272*
- 池田敏和, 山崎浩二(1993), 「数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究」, 『日本数学教育学会誌数学教育』, 第75巻, 第1号, pp.26-32
- 上野隆司(1994), 「文章題における解の解釈についての研究」, 『第27回数学教育論文発表会論文集』, pp.347-352
- 上野隆司(1995), 「文章題における解の解釈の様相」, 『数学教育研究』, 第10号, 上越教育大学数学教室, pp43-52
- 中学校教科書『新訂新しい数学1』, 東京書籍(1992)
- 中学校教科書『数学1年』, 啓林館(1992a)
- 中学校教科書『数学3年』, 啓林館(1992b)
- 中学校教科書『中学校数学3』, 大日本図書(1992)

