

トランスインピーダンス・アンプの解析

kephis @ nifty.com

2005.6.9 第1版

2005.7.22 第2版

2005.7.29 第3版

後述する文献に信号源のR成分（ R_s ）を含んだ解析が少ないので、それも含めて解析した。
DACのI/Vに使用した場合、DACの電流出力端子の出力インピーダンスが大きく特性に影響を与えるのである。

[1.トランスインピーダンス・アンプのノイズ、オフセット]

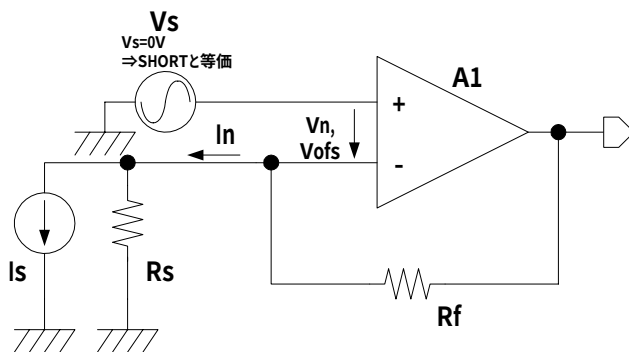


図1

トランスインピーダンス・アンプは、見かたを変えると、プラス入力電圧が0Vの非反転アンプのマイナス入力端子ラインに電流信号 I_s を注入しているものと等価である。こうみると考えやすい。プラス入力電圧が0Vということは、プラス入力GNDにショートしているのと等価と考えることができる。

R_s は、これが小さいと、A1の入力に発生する電圧ノイズ V_n やオフセット電圧 V_{ofs} が $(1+R_f/R_s)$ 倍に増大することとなり、 R_s が大きければ大きいほどノイズ・オフセットが有利となる。 $R_s \gg R_f$ で、 V_n や V_{ofs} はA1の入力換算値がほぼそのまま増大せずに出力される。このときは帰還抵抗 R_f が入っているものの、動作としてはボルテージ・フォロワと同じである。

出力のドリフトも、同様に R_s が小さければ増大し、大きければ限りなくA1の入力換算値に近づく。

V_n に関しては、

$$V_n = 1 + (R_f/R_s) \cdot \sqrt{\{ I_n^2 (R_s // R_f)^2 + V_n^2 \}} \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。

[2.トランスインピーダンス・アンプのノイズ特性]

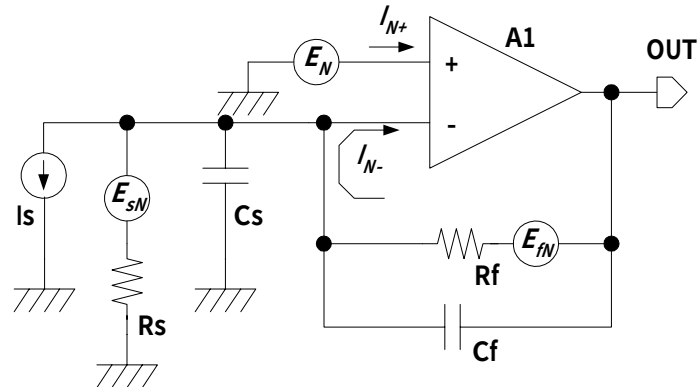


図 2

A_1 : オペアンプのオープン・ループ・ゲイン

E_N : オペアンプの入力換算電圧ノイズ

I_{N+} : オペアンプのプラス入力電流ノイズ

I_{N-} : R_f からオペアンプのマイナス入力に流れ込む入力電流ノイズ

E_{fN} : R_f のジョンソンノイズ ($\sqrt{4kTRf}$)

E_{sN} : R_s のジョンソンノイズ ($\sqrt{4kTRs}$)

C_s : オペアンプのマイナス入力にぶら下がるすべての容量の合計

R_f : トランスインピーダンス

R_s : 信号源インピーダンス

I_s : 電流信号源

図 2 のノイズモデルの、 E_N 、 I_{N+} の要素に対するノイズゲイン A_N は、

$$A_N(j\omega) = \left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right) * \frac{1 + j\omega(R_f // R_s)(C_f + C_s)}{1 + j\omega R_f C_f}$$

$$= \left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right) * \frac{1 + j(\omega / \omega_z)}{1 + j(\omega / \omega_p)} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$2\pi f_p = \omega_p = 1/(R_f C_f) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$2\pi f_z = \omega_z = 1/\{(R_f // R_s)(C_f + C_s)\} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$A_N(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right) * \frac{\omega_p}{\omega_z} = 1 + \frac{C_s}{C_f} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$|A_N(j\omega)| = \left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right) \sqrt{\frac{1 + (\omega / \omega_z)^2}{1 + (\omega / \omega_p)^2}} \quad \dots \textcircled{6} \quad *1$$

となり、下図のような周波数特性を示す。

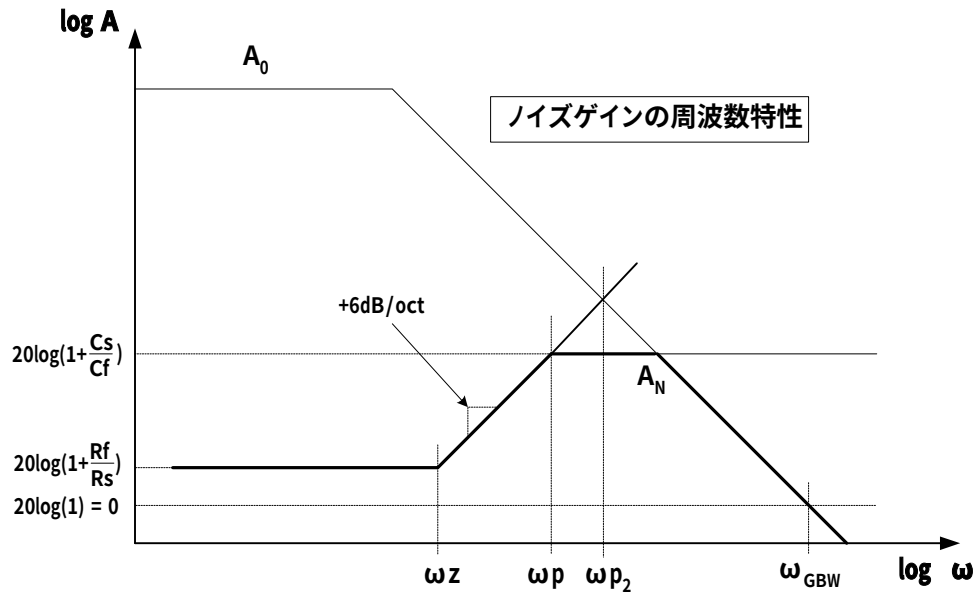


図 3

R_s が小さいと低域のノイズが増大することがわかる。

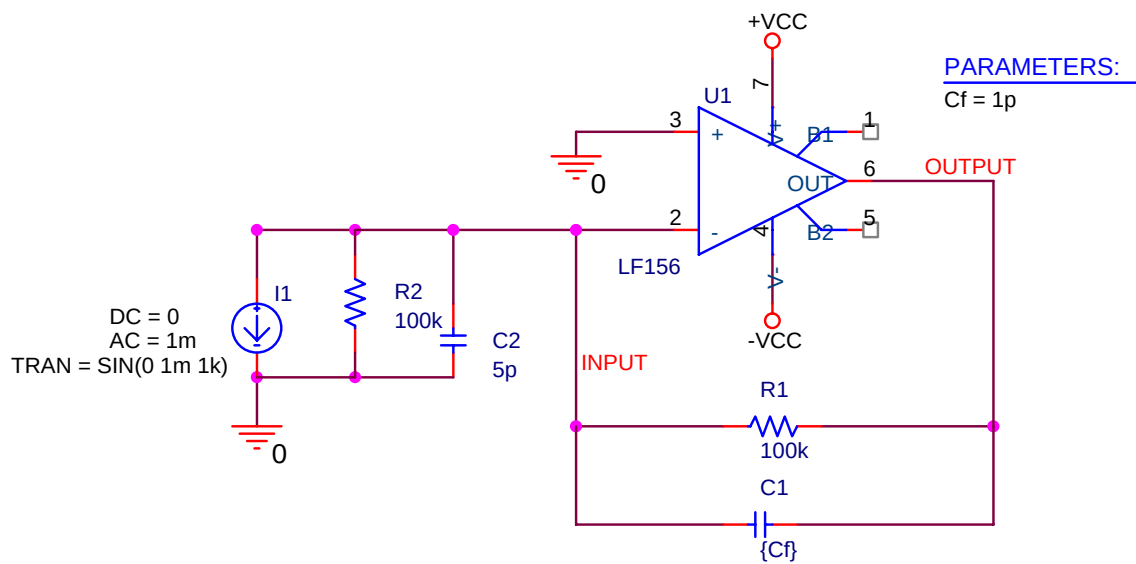


図 4

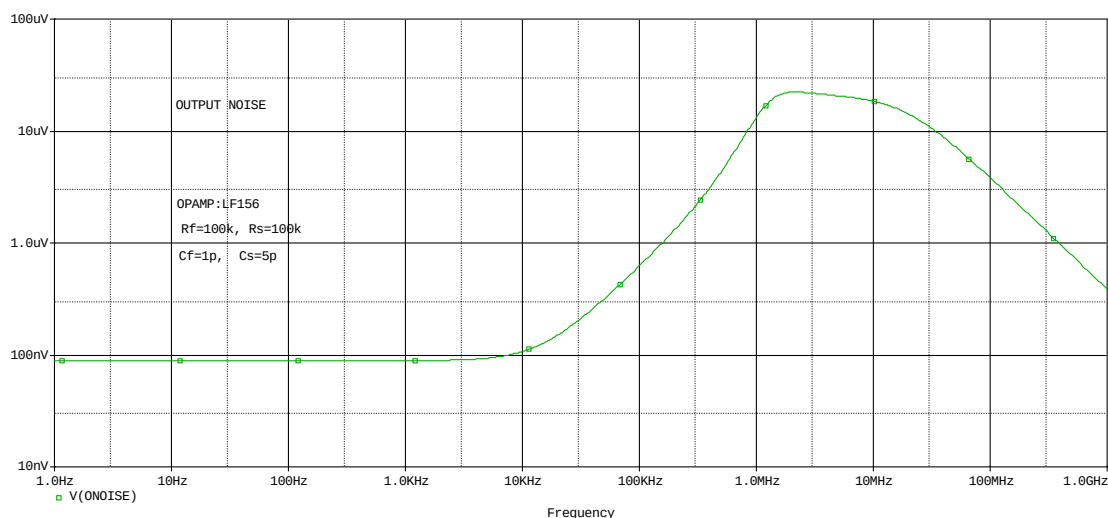


図 5

A_0 は使用するアンプのオープンループゲイン特性である。この図は、 $\omega_z < \omega_p$ の場合である。 $\omega_z > \omega_p$ の場合、逆に高域でノイズゲインは落ちる特性となる。

また、 $\omega_z = \omega_p$ の場合には、一直線のフラットな特性となる。

ノイズゲインはステップ的に ω_z と ω_p で変化し、 $\omega > \omega_p$ では $(1 + C_s / C_f)$ のレベルが $\omega \rightarrow \infty$ まで続くことになるが、実際にはアンプの周波数特性 $A_o(j\omega)$ によって高域は制限され、太線で示したようなノイズゲインの特性となる。

I_{N+} に対する電圧ノイズは、このモデルの場合発生しない。よってこの場合のノイズゲイン特性は E_N に関してのものである。もし、プラス入力端子～GND間に抵抗が入っていた場合はその分のノイズが発生することに注意する。

R_s がきわめて大きく、無視できる場合、

$$\begin{aligned}
 A_N(j\omega) &= \left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right) \frac{1+j\omega(R_f//R_s)(C_f+C_s)}{1+j\omega R_f C_f} \\
 &= \frac{1+j\omega R_f(C_f+C_s)}{1+j\omega R_f C_f} \\
 &= \frac{1+j(\omega/\omega_z')}{1+j(\omega/\omega_p')} \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\omega_p' = 1/(R_f C_f) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\omega_z' = 1/\{R_f (C_f+C_s)\} \quad \dots \textcircled{4}$$

と、簡略化できる。

図2のモデルの、電圧ノイズ E_{sN} の要素に対するノイズゲインは、 $-Rf/Rs$ 、その帯域幅は $1/(2\pi RfCf)$: (ωp) 。

図2のモデルの、電圧ノイズ E_{fN} の要素に対するノイズゲインは、1、その帯域幅は $1/(2\pi RfCf)$: (ωp) 。

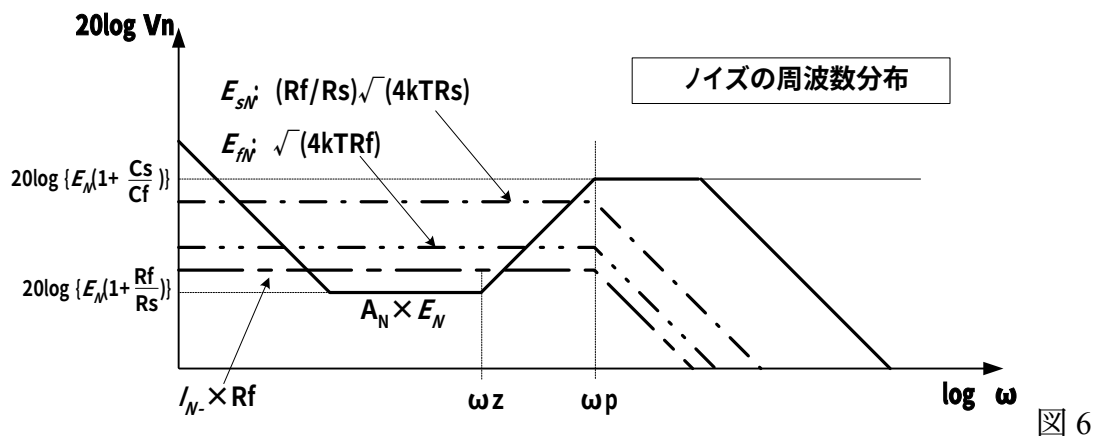
図2のモデルの、電流ノイズ I_N の要素で発生する電圧ノイズは $I_N \times Rf$ 、これに対するノイズゲインは、1、その帯域幅は $1/(2\pi RfCf)$: (ωp) 。

抵抗 R が出す熱雑音 $E_r = \sqrt{4kTR}$ [Vrms/√Hz]

k : ボルツマン定数 $= 1.381 \times 10^{-23}$ [J/K]

T : 絶対温度 [°K]

これらを総合してグラフにする。



便宜上、同じグラフに各ノイズを記載した。 E_N 成分の低域の持ち上がりは、たいていのオペアンプに存在する $1/f$ ノイズである。

出力に現れるノイズは、それぞれのノイズを別々に ω で帯域幅まで積分し、ノイズ帯域幅補正 (約 1.1 倍程度) を行い、すべてのノイズの線形合成 (2 乗の和の平方根) を計算することでもとめることができる。

総合ノイズ E_T

$$E_T^2 = \left(\int |A_N(j\omega)| E_N d\omega \right)^2 + \left(\frac{Rf}{Rs} \int E_{sN} d\omega \right)^2 + \left(\int E_{fN} d\omega \right)^2 + \left(\int I_N \times Rf d\omega \right)^2$$

..... ⑦

また、各周波数におけるノイズは、その ω におけるノイズのすべてのノイズの線形合成を求めてグラフにプロットすればよい。

線形合成なので、各周波数においてもっとも大きなノイズが支配的になる傾向にある。図6はあくまで便宜上かいたのものであって、どのノイズ成分がもっとも大きくなるか、というのは計算する必要がある。

[3.トランスインピーダンス・アンプの周波数特性、位相余裕]

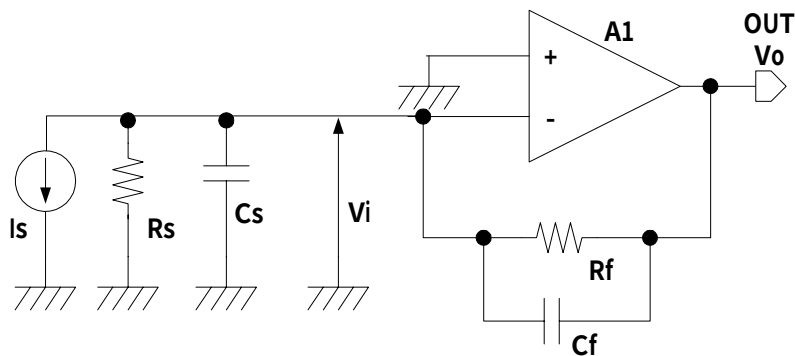


図 7

R_s/C_s を Z_s 、 $R_f/C_f=Z_f$ とする。

$$V_o = -A_1 V_i \quad \dots \quad ⑧$$

$$\begin{aligned} I_s &= V_i / Z_s + (V_i - V_o)/Z_f \\ &= -(V_o/A_1) \{1/Z_s + (1+A_1)/Z_f\} \quad \dots \quad ⑨ \end{aligned}$$

⑧、⑨式から、トランスインピーダンス（順方向伝達インピーダンス） Z_{fs} は

$$Z_{fs} = V_o/I_s = \frac{-A_1}{\frac{1}{Z_s} + \frac{1+A_1}{Z_f}}$$

ここで Z_s, Z_f を代入すると、

$$Z_{fs} = \frac{-A_1}{\frac{R_f + R_s(1+A_1)}{R_f R_s} + s \{C_s + C_f (1+A_1)\}} \quad \dots \quad ⑩$$

の一般式が得られる。

ここで、 A_1 が 1 次のカットオフ特性（時定数 T ）を持っているとする。

$A_1 \rightarrow A_0/(1+sT)$ を⑩式に代入してまとめると、

$$Z_{fs} = -\frac{A_0 R_f}{1+A_0} \frac{1}{1 + \frac{R_f}{(1+A_0) R_s} + s \left\{ R_f C_f + \frac{T(R_f/R_s + 1) + R_f C_s}{1+A_0} \right\} + s^2 \frac{T(C_f + C_s)R_f}{1+A_0}}$$

. ⑪

ここで、2次のローパスフィルタをもつH系の伝達関数の一般式を考えると

$$H = \frac{1}{1 + s \frac{1}{Q\omega_0} + s^2 \frac{1}{\omega_0^2}} \quad ⑫$$

となり、⑪式と⑫式とを比較すると、2次共振点 ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1+A_0}{T(C_f + C_s)R_f}} \quad ⑬$$

共振鋭度|Q|

$$|Q| = \frac{1}{\omega_0 \left\{ C_f R_f + \frac{T(R_f/R_s + 1) + R_f C_s}{1+A_0} \right\}} \quad ⑭$$

を得る。ここで、 R_s は、 ω_0 には関係しないことがわかる。

また、 R_s が小さくなると、|Q|が小さくなることがわかる。したがって、 R_s が小さくなると|Q|の低下が原因で-3dB帯域が下がる可能性がある。

また、 R_s が分母の定数項の分母部分にもあるため、 R_s が小さくなると、 Z_{fs} 全体も小さくなる。

ここで、 $R_s \rightarrow \infty$ と考えると、⑪式は

$$Z_{fs} = -\frac{A_0 R_f}{1+A_0} \frac{1}{1 + s \left\{ R_f C_f + \frac{T + R_f C_s}{1+A_0} \right\} + s^2 \frac{T(C_f + C_s)R_f}{1+A_0}}$$

. ⑪'

となり、文献5のセミナー1の(9)式とまったく同等となる。

以下、文献5と重なるが、⑪式のカットオフ角周波数 ω_c は、

$$\omega_c < \sqrt{\frac{1+A_0}{T(C_f + C_s)R_f}}$$

の条件で表される。これを展開すると、

$$\omega_c^2 < \frac{1+A_0}{T(C_f + C_s)R_f}$$

$$\omega_c^2 (C_f + C_s) R_f < \frac{1+A_0}{T} = \frac{1}{T} + \frac{A_0}{T} = \frac{1}{T} + 2\pi GB \quad \dots\dots (13)$$

$$\because A_0/2\pi T = GB$$

となり、周波数の2乗に比例してGB積が要求されることがわかる。

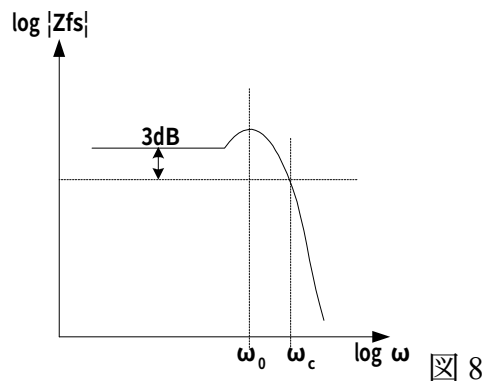
⑬式は

$$GB = A_0 / (2\pi T)$$

$$A_0 \gg 1$$

$$\omega_0 \sqrt{\frac{2\pi GB}{(C_f + C_s) R_f}} \quad \dots\dots (13)',$$

と近似可能。



トランスインピーダンス・アンプの位相余裕を狭める原因は、Cs と Rf によるポールである。トランスインピーダンス・アンプは、その閉じたループの系内部では、ノイズ・ゲイン図3または図6の E_N と同等のクローズド・ループ・ゲインとなる。

トランスインピーダンス回路の安定は、OPアンプ自体の位相余裕の安定を図ることである。図3で、 ω_z から ω_p までゲインが上昇しており、この上昇する。Cf が小さいと ω_{p2} まで上昇し、これを超えると、A0 との交点 ω_{p2} で位相余裕が無くなり、発振を引き起こす。

$\omega_{p2} \geq 1/(R_f C_f)$ の Cf で位相補正を掛ければ、発振はしない。

$\omega_{p2} = 1/(R_f C_f)$ の場合、位相補正 45DEG を確保できる。

この境界の Cf を求める。

アンプ A₁ のゲイン・バンド積：GB とする。

OPアンプのクローズド・ループ・ゲイン A_{cl} は、一般に GB/f_{p2} であり、また、 $f \gg f_{p2}$ の周波数でのクローズド・ループ・ゲインは図3から $1+C_s/C_f$ であることがわかる。これより、位相回転が起こる高域での A_{cl} について、

$$A_{cl} = GB/f_{p2} = 1+C_s/C_f$$

が成立する。

これに $f_{p2}=1/(2\pi R_f C_f)$ を代入すると C_f に関する二次式となって、その解（“正”の解）を求め簡略化すると、

$$C_f = \sqrt{\frac{C_s}{2\pi R_f GB}} \dots\dots (15)'$$

である。この値で位相余裕 45DEG を確保できることとなる。

文献3および6による、トランスインピーダンス回路としてのカットオフ周波数 ω_c は、

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\pi GB}{2R_f C_s}} \dots\dots (14)$$

で、位相余裕を 60[DEG] 確保するための C_f は

$$C_f = 2 \sqrt{\frac{C_s}{2\pi R_f GB}} \dots\dots (15)$$

先に示したが、文献1：P245～にもあるが、位相余裕を 45[DEG] 確保する C_f は 60[DEG] の時の 1/2 であり、(15)' 式となる。

また、

$$2\pi f_p = \omega_p$$

$$f_p = \sqrt{(f_z \cdot GB)}$$

（位相余裕 45DEG）が成立する。

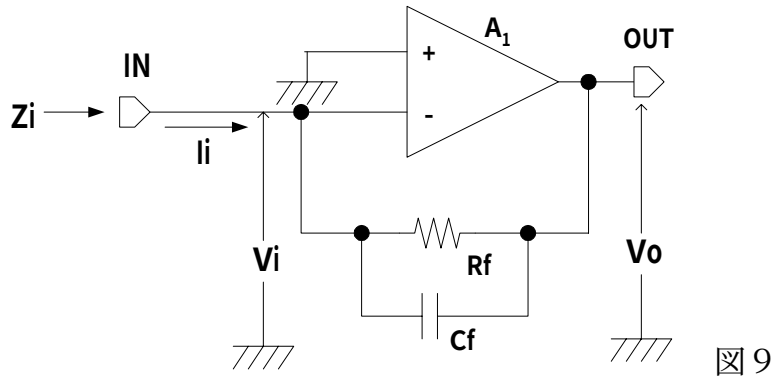
これに、 $R_s \rightarrow \infty$ とすると

$$2\pi f_{p'} = \omega_{p'}$$

$$f_{p'} = \sqrt{(f_z' \cdot GB)}$$

から、まとめると、(15)' 式が得られる。

[4.トランスインピーダンス・アンプの入カインピーダンス]



この回路で、信号源インピーダンス R_s を考慮していないが、入力インピーダンスを考えたとき、 R_s は一切影響を受けない。

$$V_o = -A_1 V_i$$

$$\begin{aligned} i_i &= (V_i - V_o)(1/R_f + j\omega C_f) \\ &= (V_i + A_1 V_i)(1/R_f + j\omega C_f) \\ &= V_i (1 + A_1)(1/R_f + j\omega C_f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{V_i}{i_i} = \frac{1}{(1 + A_1)(1/R_f + j\omega C_f)} \\ &= \frac{1/R_f - j\omega C_f}{(1 + A_1)(1/R_f + j\omega C_f)(1/R_f - j\omega C_f)} \\ &= \frac{1/R_f - j\omega C_f}{(1 + A_1)(1/R_f^2 + \omega^2 C_f^2)} \end{aligned}$$

$$Z_i = \frac{R_f - j\omega C_f R_f^2}{(1 + A_1)(1 + \omega^2 C_f^2 R_f^2)} \quad \dots \dots (16)$$

時定数 $C_f R_f$ で低下する。

$$\begin{aligned} |Z_i| &= \frac{1}{(1 + A_1)\sqrt{1/R_f^2 + \omega^2 C_f^2}} \\ &= \frac{R_f / \omega C_f}{(1 + A_1)\sqrt{R_f^2 + 1/(\omega^2 C_f^2)}} \quad \dots \dots (17) \end{aligned}$$

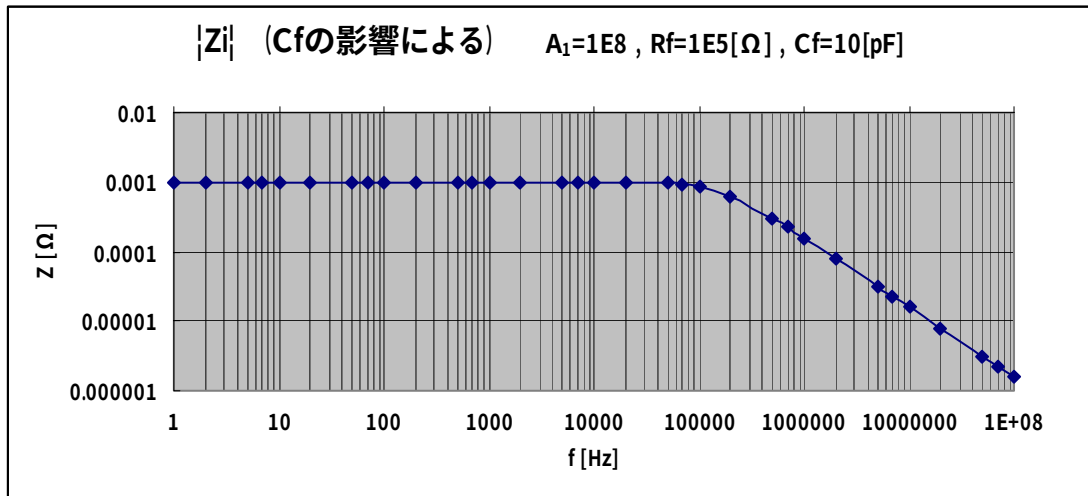


図 10

また、 $C_f \rightarrow 0$ として C_f の影響が無い場合、

$$Z_i = \frac{R_f}{1 + A_1} \dots \dots \textcircled{18}$$

アンプのオープンループ・ゲイン A_1 が大きければ大きいほど入力インピーダンス Z_i は低くなる。

$A_1 \rightarrow A_0/(1+sT)$ と、 A_1 が初期ゲイン A_0 と時定数 T を持ったとき、

$$Z_i = \frac{R_f}{1 + A_0/(1+j\omega T)} \dots \dots \textcircled{19}$$

実数部と虚数部にわけると、

$$Z_i = \frac{R_f}{(A_0+1)^2 + \omega^2 T^2} \{ (A_0+1) + \omega^2 T^2 - j\omega T \} \dots \dots \textcircled{20}$$

絶対値を求めると、

$$|Z_i| = \frac{R_f}{(A_0+1)^2 + \omega^2 T^2} \sqrt{\{ (A_0+1) + \omega^2 T^2 \}^2 + \omega^2 T^2} \dots \dots \textcircled{21}$$

と、 T より Z_i が増大し始める。

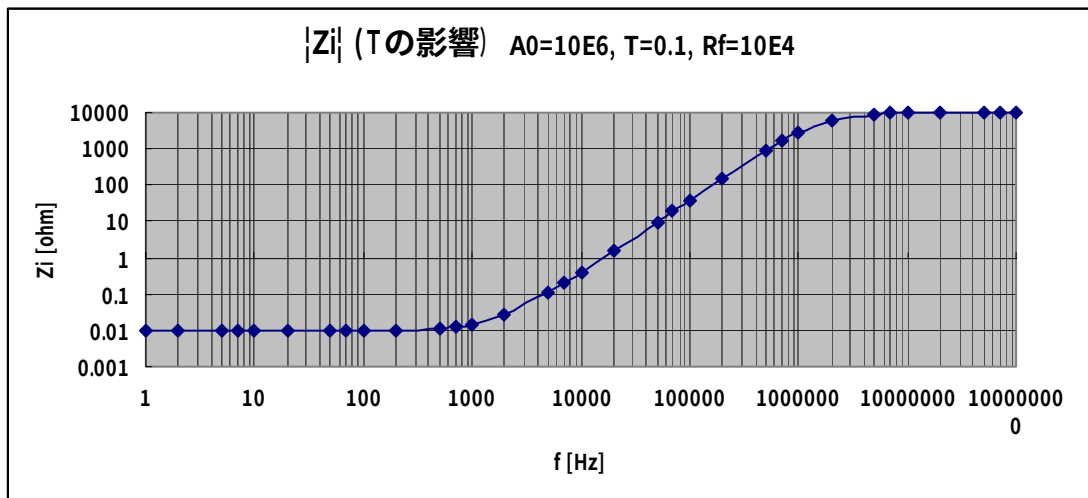


図 11

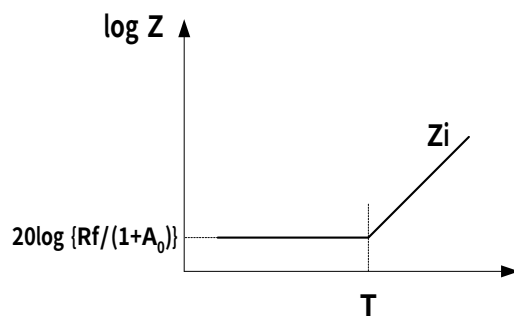


図 12

通常、 C_f は小さく、これによる時定数は T よりも高いので、 T による Z_i の上昇が支配的となる。

実際のアンプは、図 10 と図 11 の合成となり、高域でピークを持つ特性となる。

⑳式に $A_1 \rightarrow A_0/(1+sT)$ と代入すれば、

$$Z_i = \frac{1 + \omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)/R_f + [A_0/R_f + \omega^2 C_f T + j\omega\{(2 + \omega^2 T^2)C_f + T A_0/R_f\}]} \quad \dots \dots \textcircled{20}'$$

この数式での解析は難しいので、一例をシミュレーションした。

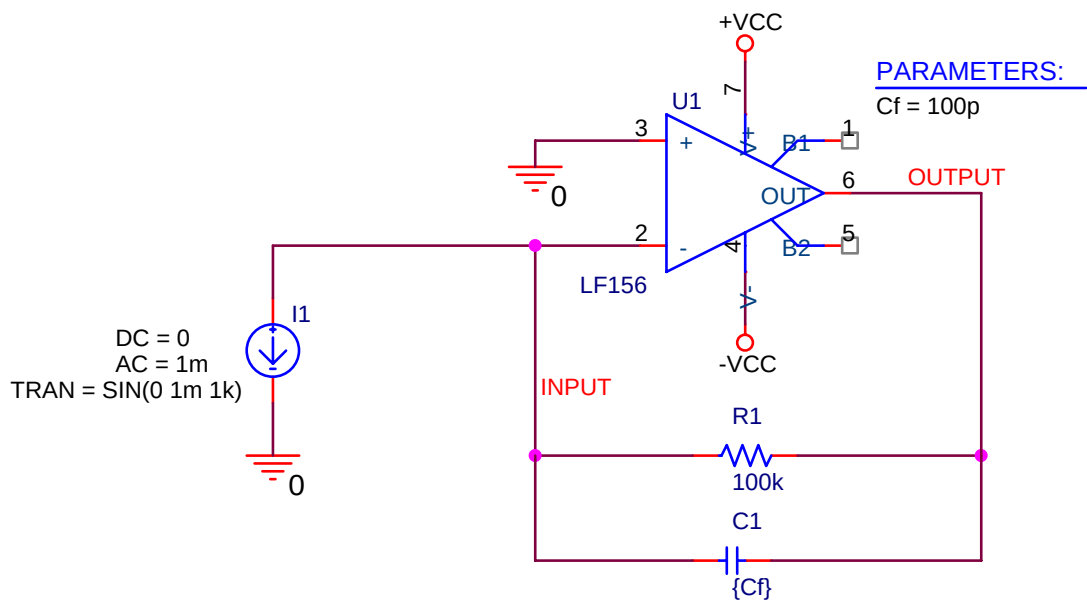


図 13

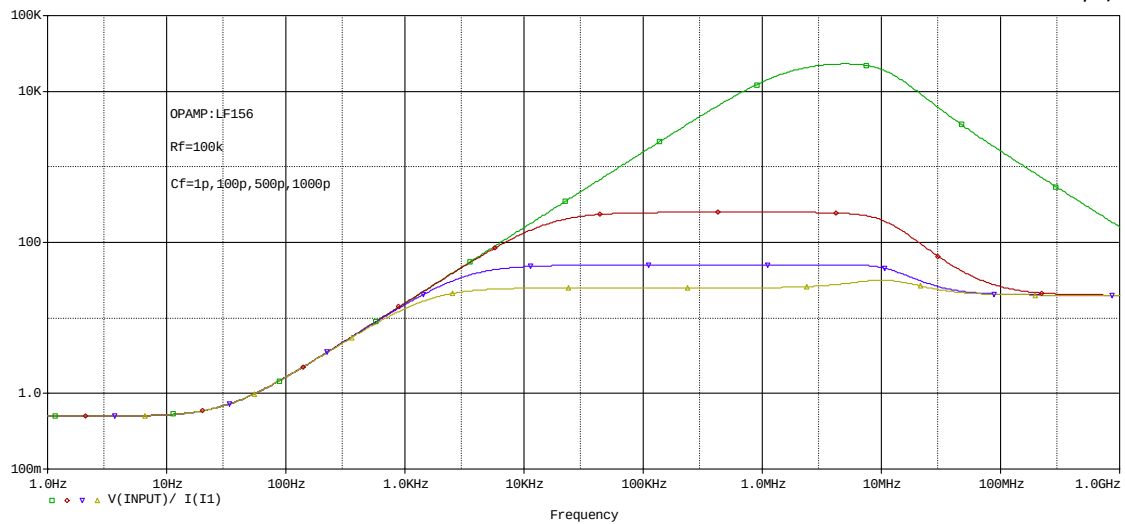


図 14

図 14 は C_f を変化させたときだが、 T による高域上昇（図 11 参照）と C_f による高域低下（図 10 参照）が両方とも 6dB/oct の特性のため、 C_f が大きくなると高域で平坦になる特性になる。

基本的に、アンプの 1st ポール（ T ）から入力インピーダンスが上昇し始める成分を注意する必要がある。

[5.トランスインピーダンス・アンプの出力インピーダンス]

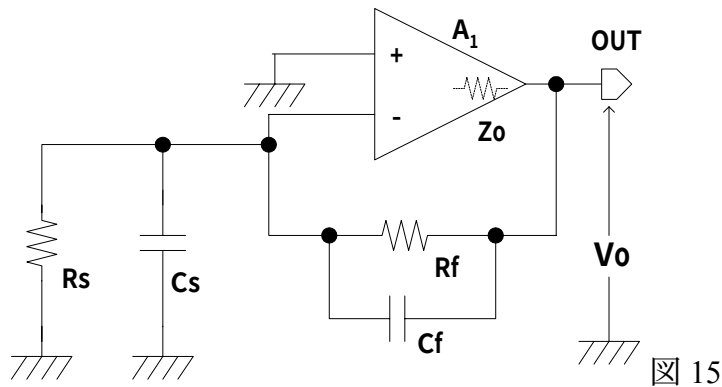


図 15

アンプのマイナス入力が高インピーダンスであれば、 $R_s \rightarrow \infty$ 、 $C_s \rightarrow 0$ 、と考えられ、同時に R_f 、 C_f の影響は少なくなり、出力インピーダンス Z_1 は簡易的に

$$Z_1 = \frac{Z_o}{1+A_1} \dots\dots (22)$$

$A_1 \rightarrow A_0/(1+sT)$ と、 A_1 が初期ゲイン A_0 と時定数 T を持ったとき、 $A_1, A_0 \gg 1$ とすれば、

$$Z_1 = \frac{Z_o(1+j\omega T)}{A_0} \dots\dots (23)$$

となり、時定数 T より Z_1 は上昇する。
ボルテージ・フォロワと同等である。

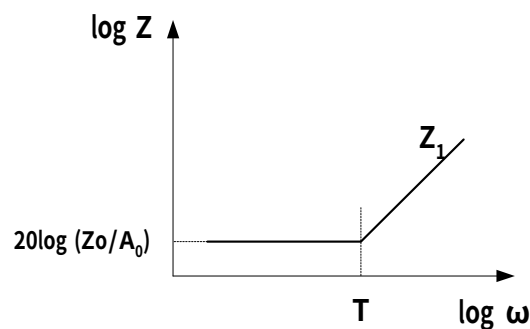


図 16

マイナス入力が高インピーダンスではなく R_s, C_s が無視できなくなるとすると、 $R_s // C_s = Z_s$ にて接地されていたとき、 $R_f // C_f = Z_f$ とすれば、

$$Z_1 = \frac{Z_o}{1+A_1(1+Z_f/Z_s)}$$

$$= \frac{Z_o}{1+A_1(1+\frac{R_f(1+sC_sR_s)}{R_s(1+sC_fR_f)})}$$

$$Z_1 = \frac{Z_o}{1+A_1[1+\frac{R_f}{R_s(1-s^2C_f^2R_f^2)}\{1+s(C_sR_s-C_fR_f)-s^2(C_fR_sC_sR_s)\}]} \dots \textcircled{24}$$

この式に $A_1 \rightarrow A_0/(1+sT)$ を代入すると、 s の 3 次式となり、かなり複雑となる。

が、 $\textcircled{24}$ 式から、 R_s が小さいと、低周波でも A_1 の係数が小さくなって Z_1 が大きくなることが推測できる。また、高周波になるにしたがって、時定数 T にてさらに Z_1 は増える。

シミュレーションにて確認する。

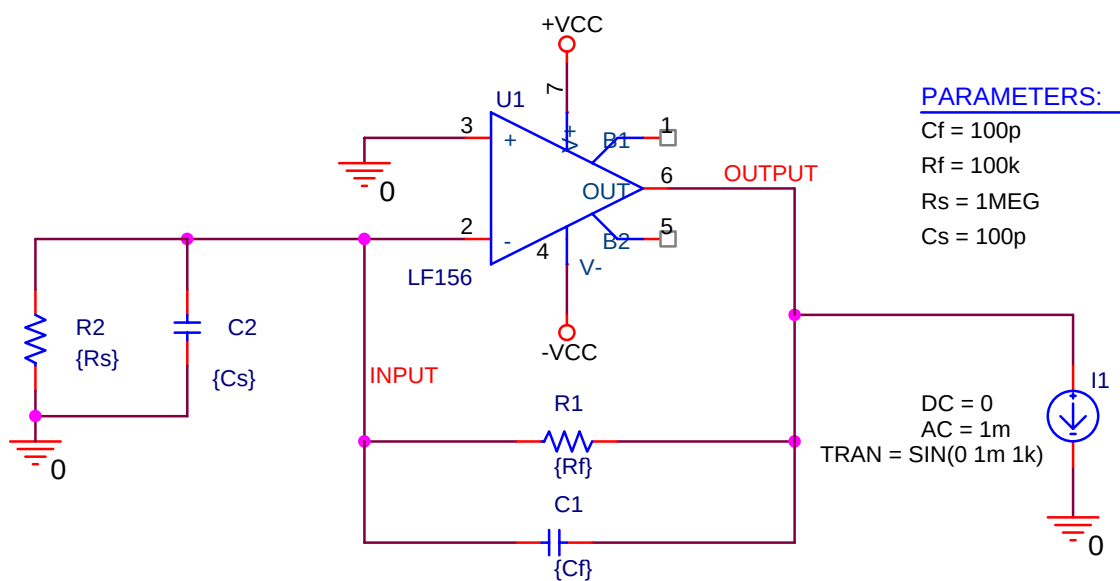


図 17

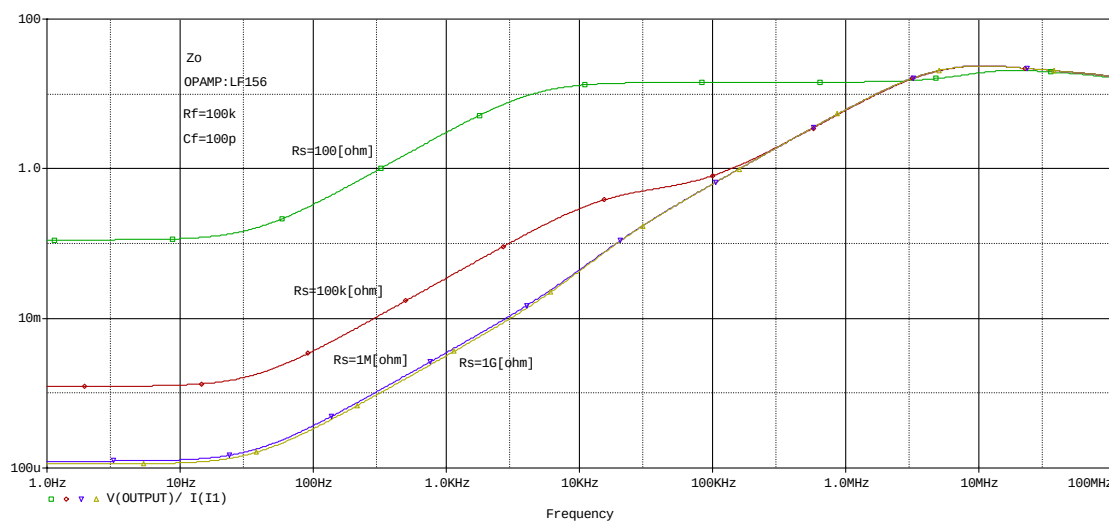


図 18

R_s が小さくなると、低周波数帯域での Z_1 は大きくなる。高域では 10Ω 超のところに飽和点があり、それ以上には増えない。

また、 C_f 、 C_s は高域で Z_1 へ影響を与えるが高域で若干与えるのみであり、 Z_1 に大きな影響を与えるのは、オペアンプの 1 次時定数 T と R_s であることがわかる。

*1 $|A_N(j\omega)|$ を求める

$$A_N(j\omega) = \left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right) * \frac{1+j(\omega/\omega_z)}{1+j(\omega/\omega_p)}$$

の実数を求める。

まず、

$$\frac{1+j(\omega/\omega_z)}{1+j(\omega/\omega_p)} \quad \text{の実数を求める。} \quad X=(\omega/\omega_p), \quad Y=(\omega/\omega_z) \quad \text{とおく。}$$

$$\begin{aligned} \frac{1+j(\omega/\omega_z)}{1+j(\omega/\omega_p)} &= \frac{1+jY}{1+jX} = \frac{(1+jY)(1-jX)}{(1+jX)(1-jX)} \\ &= \frac{1+XY}{1+X^2} + j \frac{Y-X}{1+X^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1+jY}{1+jX} \right| &= \frac{1}{1+X^2} \sqrt{(1+XY)^2 + (Y-X)^2} \\ &= \frac{1}{1+X^2} \sqrt{(1+X^2)(1+Y^2)} \\ &= \frac{\sqrt{1+Y^2}}{\sqrt{1+X^2}} \end{aligned}$$

したがって、

$$|A_N(j\omega)| = \left(1 + \frac{R_f}{R_s}\right) \sqrt{\frac{1+(\omega/\omega_z)^2}{1+(\omega/\omega_p)^2}}$$

※参考文献：

- ・ 1：「オペアンプの歴史と回路技術の基礎知識」 p203~206、p245~251（アナログ・デバイスズ著・CQ出版）
- ・ 2：トランジスタ技術 2000年10月号、p222-225、「フォト・センサ用 I-V 変換アンプ」（中村黄三）
- ・ 3：バーブラウン社アプリケーションノート ANJ-1027「相互インピーダンスアンプの位相補償法」
- ・ 4：バーブラウン社アプリケーションノート ANJ-1020「FET トランスインピーダンス・アンプの雑音解析」
- ・ 5：(株)グラビトン Web Site 「設計講座」
(<http://www.graviton.co.jp/>)
- ・ 6：「センサ活用 141 の実践ノウハウ」（松井邦彦著・CQ出版）