

第 2 章

非線形シュレディンガー方程式の数値解析

2.1 序 言

単一モードファイバ中の光波の伝搬は、マクスウェル方程式から直接導かれる非線形シュレディンガー方程式 (NLSE) によって記述される⁽²⁵⁾。本章では、NLSE に対する精度の高い数値計算手法として一般的となっているスプリットステップフーリエ法 (SSFM) の概要について述べる⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾。また波長分散や非線形の影響を表す演算子の具体的表現を導出し、Mathematica 言語⁽²⁸⁾によるコーディングの概要について述べる。

Mathematica 言語の特徴として、

- (1) パーソナルコンピュータ上で計算が可能
- (2) 複素数や配列に対応した多くの組み込み関数が見える
- (3) グラフィックが容易

等の優れたシミュレーション環境を提供する反面、配列処理に熟練を要する、直感的なプログラミングが困難、計算速度が余り速くない、といった欠点もある。

次に、本論文の主題の一つである光ソリトンを利用した計算精度の検証法について述べ、あわせて光ソリトン線路の特徴についての理論検討を行う。光ソリトン伝送を線形伝送と比較した場合、

- (1) 分散マージンが伝送距離に基本的に依存しない
- (2) 最適信号強度が伝送速度や増幅器間隔に基本的に依存しない

等の際だった特徴をもっている。

また伝送後の光信号の伝送品質を評価する手法として一般的となっている Q 値を導入し、システムパラメータ平面上で Q 値を評価する Q マップ法について説明する。Q マップ法により伝送パラメータの最適値およびその許容量が明確となり、光ソリトンなど非線形性を利用した伝送系の定量的設計が可能となった。

2.2 伝送シミュレーションコードの開発

特別な場合を除いてNLSの解析解を求めることは困難であるため、数値的に解を求める必要がある。本節ではスプリットステップフーリエ法のコーディングに必要となる演算子の具体的表現を導出する。また Mathematica 言語⁽²⁸⁾によるコーディングの概要について述べる。

2.2.1 スプリットステップフーリエ法

NLSを線形演算子： A および非線形演算子： B を用いて書くと次式となる（付録A参照）

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi = [A + B]\phi \quad (2.2.1)$$

ただし、 A 、 B は次式で与えられる。

$$A = j \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} - \frac{\alpha}{2} \quad (2.2.2)$$

$$B = -j \frac{1}{2} k n_2 \left[|\phi|^2 - T_R \frac{\partial |\phi|^2}{\partial \tau} \right] \quad (2.2.3)$$

ここで、線形演算子： A として、ファイバ分散、分散スロープ、減衰、を考慮しており、非線形演算子： B として、カー効果およびラマン効果を考慮している。通常光通信に使われる数ps程度のパルス幅では、これらの項を考慮すれば十分であることがわかっている⁽²⁶⁾。

スプリットステップフーリエ法では、線形演算子： A および非線形演算子： B を交互に作用させて、時間波形およびスペクトル分布の時間発展を並列的に計算する。線形演算子は周波数領域（スペクトル）において作用させ、非線形演算子は時間領域（時間波形）において作用させる。波長分散の影響を周波数領域で計算することによって精度の高い計算が可能となっている。また時間波形とスペクトル分布の間の変換に高速フーリエ変換を用いており、計算時間の大部分はここで消費される。

非線形シュレディンガー方程式の解を次式の形に求める。

$$\phi(z+h, \tau) = \exp\left(\frac{hA}{2}\right) \exp(hB) \exp\left(\frac{hA}{2}\right) \phi(z, \tau) \quad (2.2.4)$$

これは、次の3段階の計算ステップを想定している(図2.2.1)。

- (1) 前半 $h/2$ における線形伝搬：スペクトル分布に対し線形演算子 A を作用させ、 $h/2$ だけ伝搬させた後、時間波形に戻す。

$$\phi\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) = \exp\left(\frac{hA}{2}\right) \phi(z, \tau) = F^{-1} \left[\exp\left(-\frac{j\gamma h}{2}\right) F[\phi(z, \tau)] \right] \quad (2.2.5)$$

- (2) 非線形効果による位相補正：時間波形に対して非線形演算子 B を作用させる。

$$\phi^*\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) = \exp(hB) \phi\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) \quad (2.2.6)$$

- (3) 後半 $h/2$ における線形伝搬：スペクトル分布に変換し、線形演算子 A で $h/2$ だけ伝搬させた後、時間波形に戻す。

$$\phi(z+h, \tau) = \exp\left(\frac{hA}{2}\right) \phi^*\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) = F^{-1} \left[\exp\left(-\frac{j\gamma h}{2}\right) F \left[\phi^*\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) \right] \right] \quad (2.2.7)$$

以上で1サイクルが完了し、これを繰り返して伝送計算を行う。

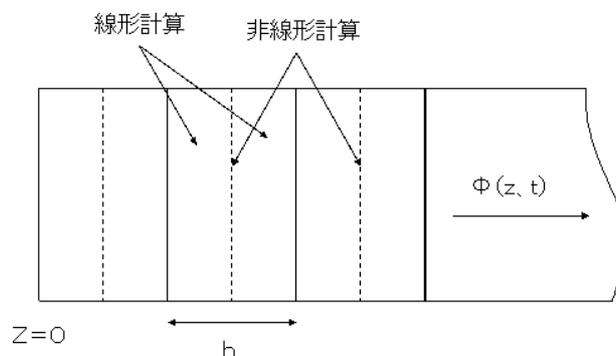


図2.2.1 スプリットステップフーリエ法の概念図

2.2.2 線形演算子の具体的表現

線形演算子 A の具体的表現について、考慮すべき線形伝搬方程式は次式である。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(j \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} - \frac{\alpha}{2} \right) \phi \quad (2.2.8)$$

これをフーリエ変換し、周波数領域でのスペクトル分布についての方程式を得る。

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(-j \frac{1}{2} \beta_2 \omega^2 - j \frac{1}{6} \beta_3 \omega^3 - \frac{\alpha}{2} \right) \psi \quad (2.2.9)$$

ここで ω は中心周波数 ω_0 からの偏差である。

(1) ファイバ減衰定数： α の定式化

ファイバのエネルギー減衰定数が α [dB/km] の時、 $h/2$ [m] 伝搬後の振幅減衰： att は次式で計算される。

$$att = 10^{-\left(\frac{\alpha}{20} \frac{h}{2 \times 10^3} \right)} = 10^{-\left(\frac{\alpha h}{4 \times 10^4} \right)} \quad (2.2.10)$$

(2) 群速度分散： γ の定式化

ファイバの群速度分散による $h/2$ 伝搬後のスペクトル分布の位相変化： gvd は次式で計算される。

$$gvd = \exp \left(- \frac{j \gamma h}{2} \right) \quad (2.2.11)$$

ここで γ は次式である。

$$\gamma = \frac{1}{2} \beta_2 \omega^2 + \frac{1}{6} \beta_3 \omega^3 \quad (2.2.12)$$

$\omega = 2\pi f$ を(2.2.12)に代入し、 β_2 [ps²/km]、 β_3 [ps³/km]、 f [THz]として計算すると、 γ [m⁻¹]は次式となる。

$$\gamma [m^{-1}] = 1.97 \times 10^{-2} \beta_2 f^2 + 4.13 \times 10^{-2} \beta_3 f^3 \quad (2.2.13)$$

通常、 β_2 は波長偏差 1 nm、伝搬距離 1 km あたりの遅延時間: D [ps/nm/km] で与えられる。

$$D = \frac{d \beta_1}{d \lambda} = \frac{d \beta_1}{d \omega} \frac{d \omega}{d \lambda} = \beta_2 \left(-\frac{2 \pi c}{\lambda^2} \right) \quad (2.2.14)$$

ここで、 $\beta_1 = \frac{1}{v_g}$ 、 $\omega = \frac{2 \pi c}{\lambda}$ 、 $\frac{d \omega}{d \lambda} = -\frac{2 \pi c}{\lambda^2}$ である。

$c = 2.998 \times 10^8$ m/s を(2.2.14)に代入し、波長を [nm] とすると D は次式で与えられる。

$$D [ps / nm / km] = -1.88 \times 10^6 \frac{\beta_2 [ps^2 / km]}{\lambda^2 [nm]} \quad (2.2.15)$$

逆に β_2 は、次式となる。

$$\beta_2 [ps^2 / km] = -5.31 \times 10^{-7} \lambda^2 [nm] D [ps / nm / km] \quad (2.2.16)$$

通常、 β_3 は波長偏差 1 nm あたりの分散 D [ps/nm/km] の変化: Sl [ps/nm²/km] で与えられる。 λ を固定して Sl を計算すると次式となる。

$$Sl = \frac{d D}{d \lambda} = \left(-\frac{2 \pi c}{\lambda^2} \right) \frac{d \beta_2}{d \omega} \frac{d \omega}{d \lambda} = \left(-\frac{2 \pi c}{\lambda^2} \right)^2 \beta_3 \quad (2.2.17)$$

$c = 2.998 \times 10^8$ m/s を(2.2.17)に代入し、波長を λ [nm] とすると、 Sl は次式となる。

$$Sl [ps / nm^2 / km] = 3.55 \times 10^{12} \frac{\beta_3 [ps^3 / km]}{\lambda^4 [nm]} \quad (2.2.18)$$

逆に β_3 は、次式となる。

$$\beta_3 [ps^3 / km] = 2.82 \times 10^{-13} \lambda^4 [nm] Sl [ps / nm^2 / km] \quad (2.2.19)$$

(2.2.16)および(2.2.19)を(2.2.13)に代入して、 γ を計算すると次式を得る。

$$\gamma [m^{-1}] = -1.05 \times 10^{-8} \lambda^2 D f^2 + 1.16 \times 10^{-14} \lambda^4 Sl f^3 \quad (2.2.20)$$

ただし、 f [THz] は信号の中心周波数 f_0 からの偏差である。特に $\lambda = 1550$ nm の場合、(2.2.20)は次式となる。

$$\gamma [m^{-1}] = -2.52 \times 10^{-2} D f^2 + 6.70 \times 10^{-2} Sl f^3 \quad (2.2.20)$$

時間波形： とスペクトル分布： の間には、高速フーリエ変換： F F Tにより次式の関係がある。

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \phi \exp \left(-j 2\pi \frac{l n}{N} \right) \quad (l = 0 \sim N - 1) \quad (2.2.22)$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \psi \exp \left(j 2\pi \frac{l n}{N} \right) \quad (n = 0 \sim N - 1) \quad (2.2.23)$$

ここで時間刻み： Δt と周波数刻み： Δf 、波長刻み $\Delta \lambda$ およびサンプル数： N 、の間には次式の関係がある。

$$\Delta f \Delta t = \frac{1}{N} \quad (2.2.24)$$

$$\Delta f [\text{THz}] = \frac{1}{\Delta t [\text{ps}] N} \quad (2.2.25)$$

$$\Delta \lambda [\text{nm}] = \lambda \frac{\Delta f}{f} = \frac{\lambda^2}{c \Delta t N} = 3.34 \times 10^{-6} \frac{\lambda^2}{\Delta t N} \quad (2.2.26)$$

周波数領域での中心周波数からの周波数偏差： f [THz]は次式で与えられる。

$$f = l \Delta f \quad \left(l = -\frac{N}{2} \sim \frac{N}{2} - 1 \right) \quad (2.2.27)$$

(2.2.25)、(2.2.27)を(2.2.20)に代入すると、次式を得る。

$$\gamma [m^{-1}] = -1.05 \times 10^{-8} \lambda^2 D \left(\frac{l}{\Delta t N} \right)^2 + 1.16 \times 10^{-14} \lambda^4 Sl \left(\frac{l}{\Delta t N} \right)^3 \quad (2.2.28)$$

特に $\lambda = 1550 \text{ nm}$ では、次式となる。

$$\gamma [m^{-1}] = -2.52 \times 10^{-2} D \left(\frac{l}{\Delta t N} \right)^2 + 6.70 \times 10^{-2} Sl \left(\frac{l}{\Delta t N} \right)^3 \quad (2.2.29)$$

(2.2.10)、(2.2.11)から $\hbar/2$ [m]伝搬させる線形演算子 A の具体的表現は次式となる。

$$\exp \left(\frac{\hbar A}{2} \right) = att \cdot gvd = 10 \wedge \left(-\frac{\alpha \hbar}{4 \times 10^4} \right) \exp \left(-\frac{j \gamma \hbar}{2} \right) \quad (2.2.30)$$

ここで、 γ は(2.2.28)で与えられる。

2.2.3 非線形演算子の具体的表現

線形演算子で距離刻み： h の $1/2$ だけ伝搬させた時間波形に、非線形演算子を作用させて区間 h における非線形効果にともなう位相補正量を計算する。考慮すべき方程式は、

$$\phi^* \left(z + \frac{h}{2}, \tau \right) = \exp (h B) \phi \left(z + \frac{h}{2}, \tau \right) \quad (2.2.6)$$

である。ここで B は(2.2.3)で与えられる。

$$B = - j \frac{1}{2} k n_2 \left[|\phi|^2 - T_R \frac{\partial |\phi|^2}{\partial \tau} \right] \quad (2.2.3)$$

波数： k は、波長を λ [nm]とすると次式で与えられる。

$$k [m^{-1}] = \frac{2 \pi}{\lambda} = \frac{6.28 \times 10^9}{\lambda [nm]} \quad (2.2.31)$$

単位断面積あたりの信号パワー： $|\phi|^2$ は次式となる。

$$|\phi|^2 [W / m^2] = 10^9 \frac{P [mW]}{s [\mu m^2]} \quad (2.2.32)$$

ここで P は伝送中の時間波形から計算した瞬時パワー、 s は有効コア断面積である。

カー定数： n_2 は石英系光ファイバにおいて、次の実測値が報告されている^{(29),(30)}。

$$n_2 = 2.24 \times 10^{-20} [m^2 / W] \quad (2.2.33)$$

(2.2.31)、(2.2.32)より、(2.2.3)のカー効果に対する項は次式となる。

$$B = - j 3.14 \times 10^{18} \frac{n_2 P}{\lambda s} \quad (2.2.34)$$

(2.2.6)に代入し、カー効果にともなう非線形演算子の具体的表現を求めると次式となる。

$$\exp (h B) = \exp \left(- j 3.14 \times 10^{18} \frac{h n_2 P}{\lambda s} \right) \quad (2.2.35)$$

ラマン効果（カー効果の時間遅れ）の項については、時間領域で波形の微分をとることにより計算している。

2.2.4 Mathematica によるコーディングの概要

従来、NLSの数値計算はFORTRAN言語を用いてワークステーションやスーパーコンピュータ上で計算されることが多かった。しかし最近のパーソナルコンピュータの性能向上は著しく実用的な計算が可能となってきている。今回、Mathematica言語⁽²⁸⁾を用いてコーディングを行った。Mathematica言語の特徴として、

- (1) パーソナルコンピュータ上で計算が可能
- (2) 複素数や配列に対応した多くの組み込み関数が見える
- (3) グラフィックが容易

等の優れたシミュレーション環境を提供する反面、配列処理に熟練を要し直感的なプログラミングが困難、計算速度が余り速くない、といった特徴がある。

コード開発にあたり留意したのは次の2点である。

(1) 方程式の非規格化

入力パラメータの単位として、実用上良く使われる単位を採用し、方程式の規格化は行っていない(信号強度のみ初期ピークパワーで規格化している)。これは実際のシステム設計における利便性を考慮したものである。

(2) スケーラビリティ

パラメータを明確にすることで各パラメータの変更に対し、コードの変更が最小限となるようにした。これは伝送速度や刻み幅などの変更に対する結果の信頼性を確保するためである。

シミュレーションにおける時間刻み、距離刻みについては、パルスの時間的、空間的变化の特性長よりも十分短く設定する必要がある。また(2.2.24)に示すように周波数帯域幅については時間刻みにより決定されるので、波長多重(WDM)伝送計算では時間刻みを十分短く設定する必要がある。

距離刻みについては分散距離、非線形距離、減衰距離等、空間的变化の特性長よりも十分短く設定する必要がある。またWDM伝送計算ではチャンネル間のパルス衝突距離についても考慮する必要がある。距離刻みを十分短く設定しないと4光波混合(FWM)の影響を過剰評価してしまうことが知られている⁽³¹⁾。

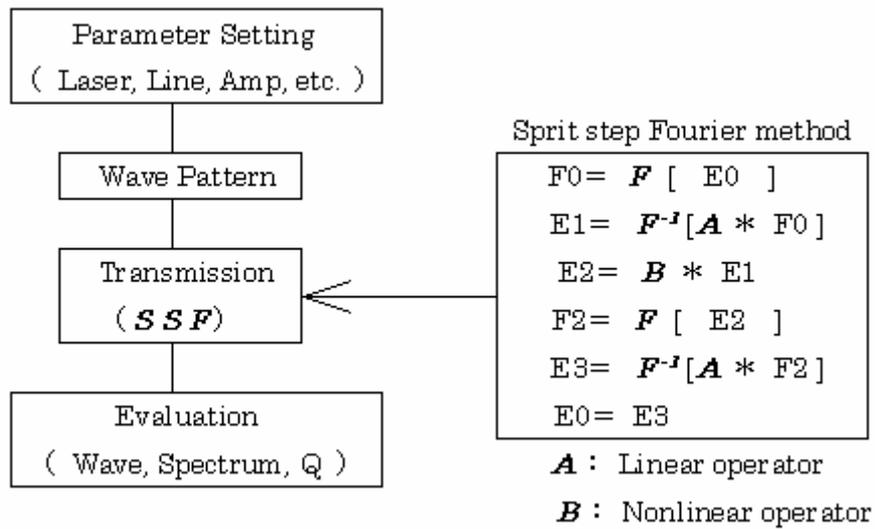


図 2.2.2 スプリットステップフーリエ法のアルゴリズム

非線形シュレディンガー方程式の数値計算にもちいるスプリットステップフーリエ法について、その計算原理を示し、線形演算子および非線形演算子の具体的表現を導出した。また Mathematica によるコーディングの概要について述べた。今回開発したコードリストを付録 B に示す。

2.3 光ソリトンを利用した計算精度検証

シミュレーションコードがファイバの分散性、非線形性の影響を正しく計算していることを確かめるため、光ソリトンの性質を利用する方法がある。ソリトンは分散性と非線形性の複合した現象であり、その性質は理論的に明らかとなっているため、コードに適切なパラメータを設定して計算が正しく行われていることを確認することが可能である。

当初、光ソリトンは、減衰項を含まない非線形シュレディンガー方程式 (NLSE) の解として理論的に導かれた⁽³²⁾、⁽³³⁾。この解は異常分散領域において $sech^2$ 型の包絡線形状を持つ光パルスが安定に伝搬するものであった。その後、光通信技術の進展にともない $1.5\mu\text{m}$ 帯の伝送に適した分散シフトファイバ (DSF) や、スペクトル幅の狭い分布帰還型レーザ (DFB-LD)、および光信号をそのまま増幅する光ファイバ増幅器 (EDFA) 等の技術が実用化され、光ソリトンの長距離伝送実験が可能となった⁽³⁴⁾。さらに線路損失のある場合や⁽³⁵⁾、伝送路に正常分散ファイバを用いた場合⁽³⁶⁾、等でも安定な光パルスが伝搬することが実験的に確認された。特に周期的分散補償技術による伝送特性の改善は、光ソリトン通信の実用化において重要な発見である⁽³⁷⁾。

また理論的にも、線路損失のある場合⁽³⁸⁾ や分散補償を行った場合⁽³⁹⁾、さらには波長多重化した場合⁽⁴⁰⁾ の光パルスの安定性についての研究がすすみ、実験、理論、シミュレーションの面から実用化に向けた研究が進められている。光ソリトン伝送では、パルスの固有の安定性を利用してチャネル当たりの伝送速度の高速化が可能であり、波長数の低減による伝送装置の小型化、低コスト化がはかれる可能性がある。またフォトニックネットワークにおいても、波長多重とは別のアプローチとして、時間多重 (TDM) によるアーキテクチャーが残る可能性も考えられる。

2.3.1 損失のないファイバにおける信号強度

減衰のないファイバにおいて光ソリトンを伝搬させ、数値計算が正しく行われていることを確かめた。伝送損失のない分散値が一定の理想的ファイバにおける非線形シュレディンガー方程式：

$$j \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2} k n_2 |\phi|^2 \phi \quad (2.3.1)$$

は、次のソリトン解を持つことが知られている⁽³³⁾。

$$\phi(z, \tau) = \phi_p \exp\left(j \frac{\beta_2}{2 t_0^2} z\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\tau}{t_0}\right) \quad (2.3.2)$$

ただし、 t_0 は、光強度の半値全幅 (F W H M) を t として次式で与えられる。

$$t_0 = \frac{t}{2 \cosh^{-1} \sqrt{2}} = 0.567 t \quad (2.3.3)$$

この時、ソリトンのピークパワーは、次式で与えられる。

$$|\phi_p|^2 = -\frac{2 \beta_2}{t_0^2 k n_2} \quad (2.3.4)$$

ただし異常分散領域では(2.2.16)から $\beta_2 < 0$ であり、異常分散領域に、明るいソリトン解が存在する⁽³²⁾。(2.3.4)を通常使われるパラメータで書き換えると、ピークパワー P [mW] は次式となる⁽²⁵⁾。

$$P[\text{mW}] = 5.27 \times 10^{-28} \frac{\lambda^3 s D}{n_2 T^2} \quad (2.3.5)$$

ここで、 D [ps/nm/km] は分散、 T [ps] はパルス幅 (F W H M) を表す。

波長 $\lambda = 1550$ nm、有効コア断面積 $s = 50 \mu\text{m}^2$ 、カー定数 $n_2 = 2.24 \times 10^{-20} \text{m}^2/\text{W}$ とすると、(2.3.5)は次式となる。

$$P[\text{mW}] = 4.38 \times 10^3 \frac{D}{T^2} \quad (2.3.6)$$

$D = 0.2$ ps/nm/km、 $T = 10$ ps としてこれに代入すると、 $N = 1$ の基本ソリトンのピークパワーとして 8.76 mW (+9.43 dBm)を得る。また、 $N = 2$ 、 $N = 3$ のソリトンでは、それぞれ 35.0 mW (+15.4 dBm)、78.8 mW (+19.0 dBm)となる。

一方、分散距離 L_d [km] は次式で計算される。

$$L_d [\text{km}] = 6.07 \times 10^5 \frac{T^2}{\lambda^2 D} \quad (2.3.7)$$

$\lambda = 1550$ nm の時、(2.3.7)は次式となる。

$$L_d [\text{km}] = 0.253 \frac{T^2}{D} \quad (2.3.8)$$

またソリトン周期 L_s は次式となる。

$$L_s [\text{km}] = \frac{\pi}{2} L_d = 0.397 \frac{T^2}{D} \quad (2.3.9)$$

図 2.3.1 に $T = 10$ ps、 $D = 0.2$ ps/nm/km の場合の 1, 2, 3 次ソリトンの計算を示す。

伝送距離を 400 km としており、約 2 周期分のソリトン波形が示されている。

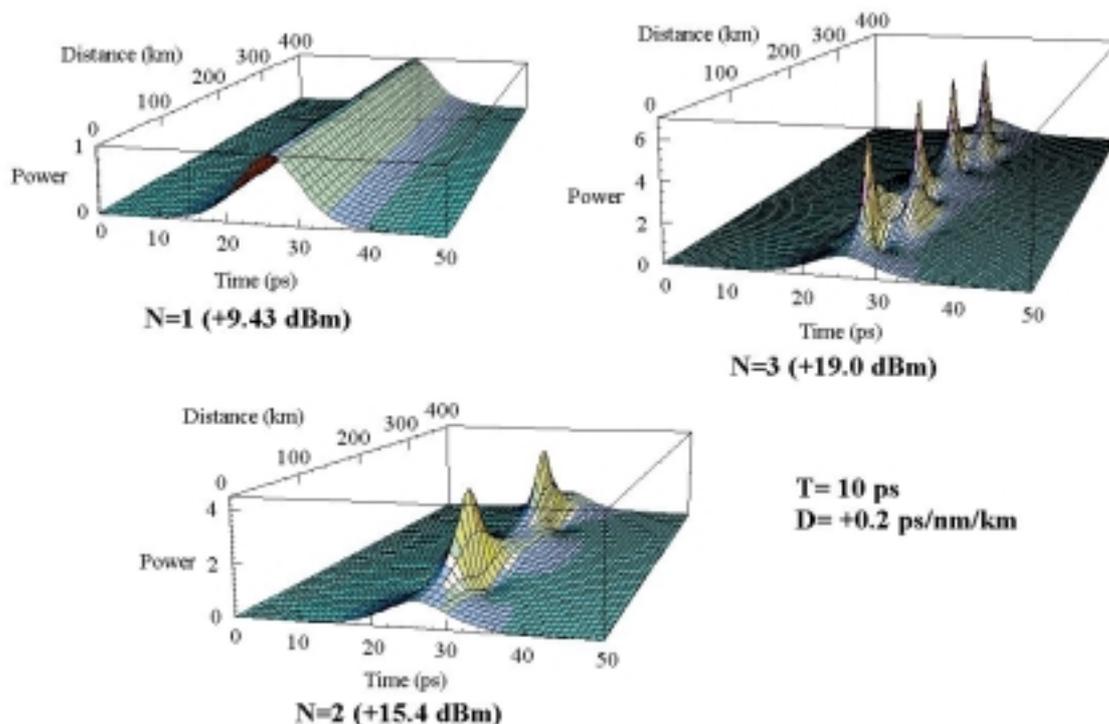


図 2.3.1 光ソリトンを利用した計算精度検証（減衰のない場合）
 (Power については初期ピークパワーで規格化)

2.3.2 損失のあるファイバにおける信号強度⁽⁴¹⁾

損失のあるファイバでは、非線形性の影響が伝送区間で平均化されるため、初期パワーを強くする必要がある。増幅器ゲインを G_0 とすると、初期ピークパワーは次式となる。

$$P_0 = P \frac{G_0 \ln G_0}{G_0 - 1} \quad (2.3.10)$$

ここで G_0 は増幅器のゲインであり、ファイバの減衰定数 α 、増幅器間隔 L_a との関係は次式である。

$$G_0 \exp(-\alpha L_a) = 1 \quad (2.3.11)$$

(2.3.10)、(2.3.11)から、損失のある場合の光ソリトンのピークパワーが計算できる。

図 2.3.2 に減衰定数 0.2 dB/km、増幅器間隔 50 km、ピークパワー 22.4 mW (+13.5 dBm)で

400 km 伝送した時の波形を示す。損失のある場合も光ソリトンの効果で伝送中のパルス広がりが抑制されている。このようなソリトンはガイディングセンターソリトン⁽³⁸⁾またはダイナミックソリトン⁽³⁵⁾等と呼ばれており、増幅器間隔 L_a が分散距離 L_d よりも小さいことがその安定条件となる。一般的に光ソリトン伝送における分散マージンはソリトンの安定条件から決定され、伝送距離には基本的に依存しないことが特徴である。これは増幅器毎に波形整形効果が働いていることを示している。実際に周回線路を用いた実験で無限大の伝送が可能であることが示されている⁽⁴²⁾。

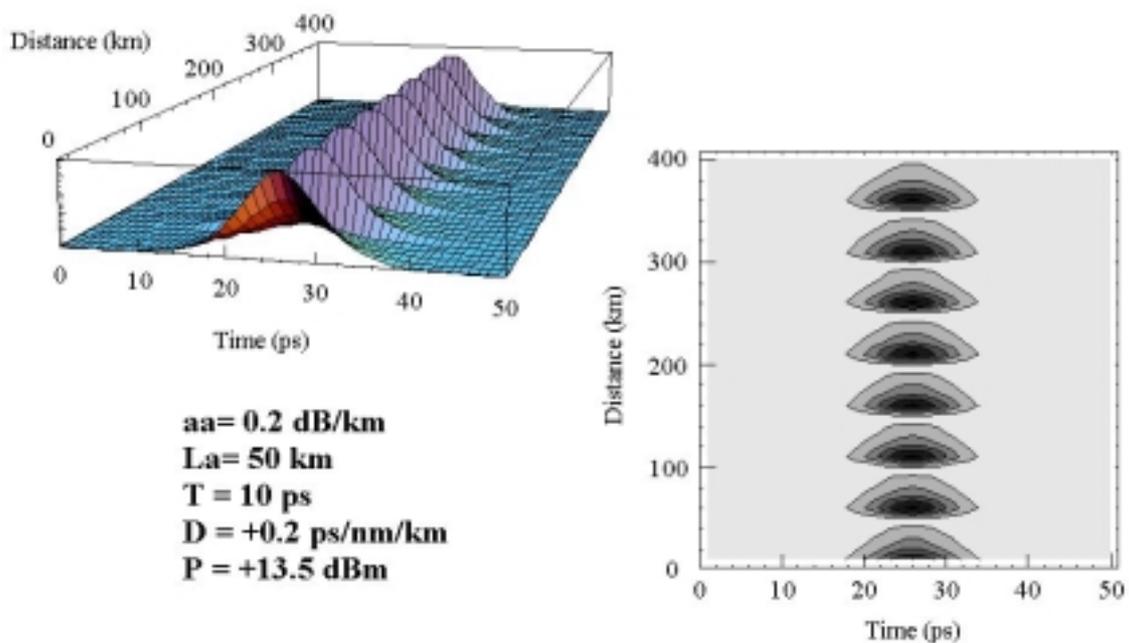


図 2.3.2 光ソリトンを利用した計算精度検証（減衰のある場合）

$\ln G_0 = \alpha L_a$ であるから、 $G_0 \gg 1$ とすると、(2.3.10) に (2.3.11) を代入して次式を得る。

$$P_0 = 4.38 \times 10^3 \frac{D}{T^2} \alpha L_a \quad (2.3.12)$$

(2.3.8) の分散距離を (2.3.12) に代入し、 $\lambda = 1550 \text{ nm}$ とすると次式を得る。

$$P_0 = 2.55 \times 10^2 \alpha_0 \frac{L_a}{L_d} \quad (2.3.13)$$

ここで、 α_0 [dB/km] はレーリー散乱等で決まるファイバ減衰定数であり、 $\alpha_0 = 0.2303 \alpha$ の関係がある。

もし最適伝送条件において L_a / L_d が一定値になると仮定すれば、(2.3.13) から光ソ

リトン伝送の最適信号強度は、カー定数、ファイバ減衰定数、有効コア断面積、等の物質定数のみから決定され、伝送速度（パルス幅）や増幅器間隔に依存しないことになる⁽⁴¹⁾。この性質は光ソリトン伝送の特徴であり、増幅器間隔が不均一な場合や⁽⁴³⁾、伝送速度をアップグレードした場合でも増幅器出力を一定に保つべきことを示している。実際に、光ソリトンの最適信号強度が、伝送速度や増幅器間隔に依存せず一定となることを数値シミュレーションにより確かめた⁽⁴¹⁾。

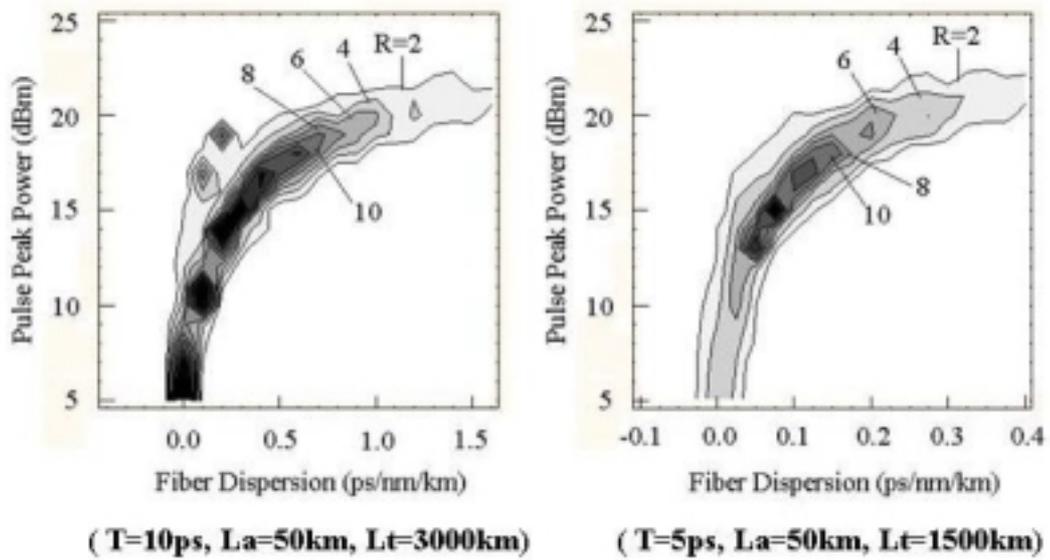


図 2.3.3 1 パルス伝送解析（パルス幅依存性）

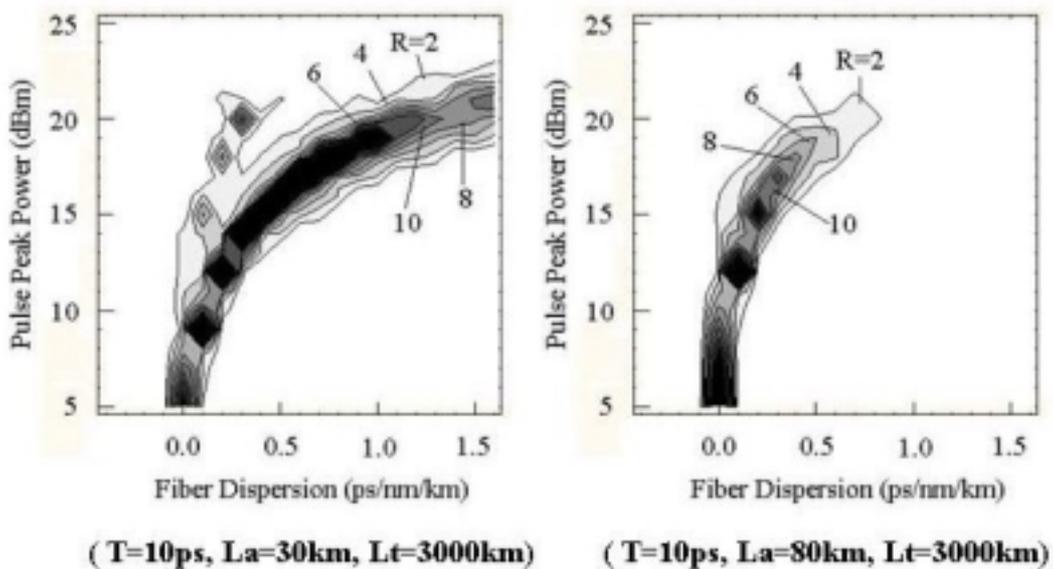


図 2.3.4 1 パルス伝送解析（増幅器間隔依存性）

図 2.3.3、図 2.3.4 は、1 パルスの安定性について、伝送パラメータ平面上で評価したものである。評価関数として、(2.4.14)で定義される R 値を使用し、横軸にファイバ分散、縦軸にピークパワーをとっている。線路分散は一定とし、パルス波形は sech^2 を仮定した。

図 2.3.3 では、初期パルス幅 T を 10 ps、および 5 ps として R 値の評価を行ったものである。減衰定数を 0.2 dB/km、増幅器間隔 L_a を 50 km とし、伝送距離 L_t をそれぞれ、3000 km、1500 km としている。雑音は考慮していない。ビットスロットはそれぞれ 50 ps、25 ps を仮定して ($T_{\text{FWHM}} / T_{\text{SLOT}} = 0.2$) エネルギー保存量の評価を行った。

最適ピーク強度はパルス幅によらず +15 dBm 程度となった。これは、(2.3.13)から最適条件における L_a / L_d の値が 0.6 程度であることを示している。また $L_a < L_d$ の領域では $R > 10$ (エネルギー保存率 99% 以上) が達成されていることがわかる。

図 2.3.4 は、パルス幅 10 ps として、増幅器間隔を 30 km、および 80 km としているが、この場合も +15 dBm 程度で最適伝送となっている。 $T_{\text{FWHM}} / T_{\text{SLOT}} = 0.2$ 、およびマーク率(信号中の 1 の比率)を 0.5 と仮定して、平均信号強度に換算すると、+5.5 dBm となる。

この節では光ソリトンを利用した計算精度検証について述べるとともに、光ソリトン伝送を線形伝送と比較した時の特徴について考察した。

(1) 分散マージン

分散マージンは、ガイディングセンターソリトンの安定条件 ($L_a < L_d$) から決定され伝送距離には依存しない。この性質は増幅器毎に波形整形効果が働いていることを示している。実際にソリトンでは無限大の伝送が可能であることが周回実験において示されている。

(2) パワーマージン

固有値解析から、 $N = 1$ のソリトンに安定に収束するためには、伝送中のソリトン次数が $0.5 < N < 1.5$ の範囲にあることが望ましい⁽³³⁾。この条件からソリトン伝送における最大増幅器間隔や、パワーマージンが決定される。減衰定数 0.2 dB/km のファイバを用いて長距離伝送する場合、増幅器間隔は約 50 km 以下であることが望ましく、パワーマージンは約 4.8 dB (-3 dB ~ +1.8 dB) 程度となる。

(3) 最適信号強度

最適伝送条件において、光ソリトンの最適信号強度は伝送速度や増幅器間隔には基本的に依存しないことを 1 パルス伝送シミュレーションにより確認した。この節の議論は一定分散の場合であるが、分散補償を行った場合にもこれらの性質は、ほぼ保たれる(3.2 節参照)。

2.4 Q値による伝送品質評価

伝送特性の評価手法としてQ値を導入する。また光線路の特性解析は非線形システムとなり、複数のパラメータの影響を同時に評価する必要がある。パラメータ空間上で伝送特性を評価する手法としてQマップ法を導入し、周期的分散補償線路の最適化に適用する。

2.4.1 光線路のモデル化

光線路のモデル化においては、多くのパラメータを考慮する必要がある。

- (1) 信号波形関係 (パルス幅、信号強度、ビットレート、パルスパターン、周波数チャープ、波長間隔等)
- (2) ファイバ関係 (有効コア断面積、減衰定数、分散、分散スロープ、分散補償量、分散補償間隔、カー定数、偏波モード分散 (PMD)、自己周波数シフト等)
- (3) 増幅器関係 (増幅器間隔、雑音指数、フィルタ、ラマン増幅等)
- (4) 数値計算関係 (距離刻み、時間刻み、ループ回数等)

図 2.4.1 のような周期的分散補償線路について考察する⁽³⁷⁾。光線路は一様な分散値 D [ps/nm/km]を持つ伝送用ファイバと、分散補償素子 D_c [ps/nm]により構成される。伝送用ファイバの分散値としては、負値 (正常分散) または正值 (異常分散)をとることができる。この時、平均分散: D_{av} [ps/nm/km]は、次式で与えられる。

$$D_{av} = D + \frac{D_c}{N_c \cdot L_a} \quad (2.4.1)$$

ここで、 N_c は分散補償間隔、 L_a [km]は増幅器間隔である。伝送距離を L_t [km]とする。下図では、分散補償素子は補償区間の最後に挿入されているが (非対称型) 補償区間の中間点に挿入したものを (対称型) と定義する (図 3.2.1 参照)。

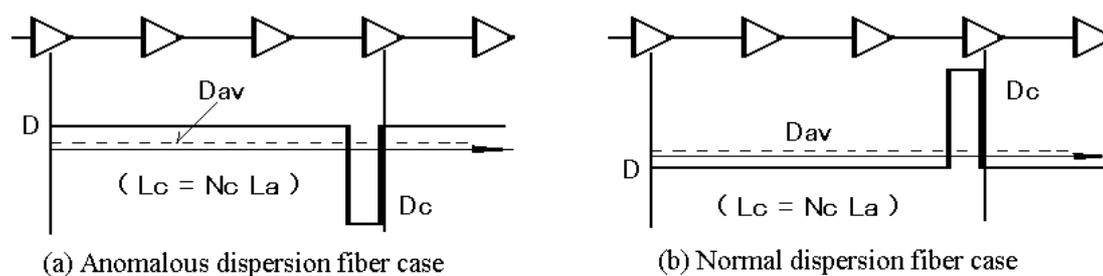


図 2.4.1 周期的分散補償線路のモデル化 (非対称型)

2.4.2 初期波形の定義

非線形シュレディンガー方程式から逆散乱法で導かれるソリトン解は、(2.3.2)のように電界の包絡線が *sech* 関数で表されるものであった。パルスのピークパワーを P_m 、ファイバの有効コア断面積を S 、とすると次式で表される。

$$\phi(0, \tau) = \sqrt{\frac{P_m}{S}} \operatorname{sech}\left(\frac{\tau}{T_0}\right) \quad (2.4.2)$$

ここで、 T_0 は、パルス幅(半値全幅) T_{FWHM} と、 $T_{FWHM} = 1.763 T_0$ の関係となる。

一方、図 2.4.1 のように周期的分散補償した線路では周波数チャープを持つガウス関数で近似されるパルスが伝搬することが知られている⁽³⁹⁾。

$$\phi(0, \tau) = \sqrt{\frac{P_m}{S}} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2T_0^2}(1 - iC)\right] \quad (2.4.3)$$

ここで、 T_0 は、パルス幅(半値全幅) T と、 $T_{FWHM} = 1.665 T_0$ の関係となる。また C はチャープパラメータであり、 $C < 0$ ではアップチャープを表し、パルスの前半から後半にかけて周波数が線形に増加する。 $C > 0$ は逆にダウンチャープを表す。

ガウシアン波形を仮定し、パルスの duty 比 (T_{FWHM} / T_{SLOT}) を 30 %、マーク率(信号中の 1 の比率)を 50 %と仮定すると、パルスのピークパワー P_m と、信号の平均パワー P_{av} の間は次の関係が成立する。信号強度は原則として平均パワーで表す。

$$P_{av} = 0.160 P_m \quad (2.4.4)$$

$$P_{av} [dBm] = P_m [dBm] - 8.0 \quad (2.4.5)$$

以下のシミュレーションにおいて、原則として 16 bit のランダムパターンを使用し、物理定数として表 2.4.1 の値を採用する。ソリトン伝送ではパルスの安定性、および隣接パルスとの相互作用の影響が支配的であるため、この程度のビット数でもかなり明瞭に伝送領域が評価できることがわかった。

表 2.4.1 シミュレーションに用いた物理定数等

	減衰定数	0.20	dB/km
n_2	カー定数	2.24×10^{-20}	m ² /W
T_R	非線形応答時間	5.0	fs
S	有効コア断面積	50	μm ²

2.4.3 増幅器雑音の評価

最適信号強度は、ファイバの非線形性による信号劣化と増幅器雑音による信号劣化のバランスにより決定される。したがって増幅器雑音をどのようにコードに組み入れるかが実用上重要となる。今回開発したコードでは、増幅器の雑音指数 (NF) から雑音パワーを計算して時間領域で組み入れている。

増幅器の自然放出光の平均パワーは次式で与えられる⁽⁴⁴⁾。

$$P_{ASE} = (G - 1) n_{sp} h \nu B \quad (2.4.6)$$

ここで G は増幅器利得、 n_{sp} は反転分布から決定される自然放出係数、 $h\nu$ は光子エネルギー、 B はバンド幅である。 n_{sp} と雑音指数の間には、

$$NF = 2 n_{sp} (G - 1) / G \quad (2.4.7)$$

の関係があり、(2.4.6)に代入すると次式となる。

$$P_{ASE} = \frac{G}{2} NF h \nu B \quad (2.4.8)$$

ここで、光子エネルギーは次式で与えられる。

$$h \nu [J] = 6.63 \times 10^{-34} \frac{c}{\lambda} = \frac{1.99 \times 10^{-16}}{\lambda [nm]} \quad (2.4.9)$$

またバンド幅を B [GHz] とすると、 P_{ASE} は次式で与えられる。

$$P_{ASE} [mW] = 0.994 \times 10^{-4} G 10^{\left(\frac{NF [dB]}{10}\right)} \frac{B [GHz]}{\lambda [nm]} \quad (2.4.10)$$

特に $\lambda = 1550$ nm では、 P_{ASE} は次式となる。

$$P_{ASE} [mW] = 6.41 \times 10^{-8} G 10^{\left(\frac{NF [dB]}{10}\right)} B [GHz] \quad (2.4.11)$$

このコードでは、 B を信号のビットレート [Gbit/s] で評価している。偏波無依存の受信器の場合は(2.4.10)を2倍する必要があり、さらに波長多重の場合は各偏波あたりの多重数を乗じる必要がある。実際には、(2.4.10)にランダムな位相係数をかけ、さらに電界振幅にするため平方根をとり、時間領域で信号電界に加えている。

2.4.4 RZ信号に対するQ値の定義

図 2.4.2 に伝送波形の計算例を示す。伝送中の光パルスはファイバの非線形性により歪みを受ける。またファイバの損失により減衰した光パルスは増幅器により線形に増幅されるが、同時に増幅器雑音も信号に重畳される。これを繰り返すことにより信号波形は次第に初期波形からずれたものとなる。

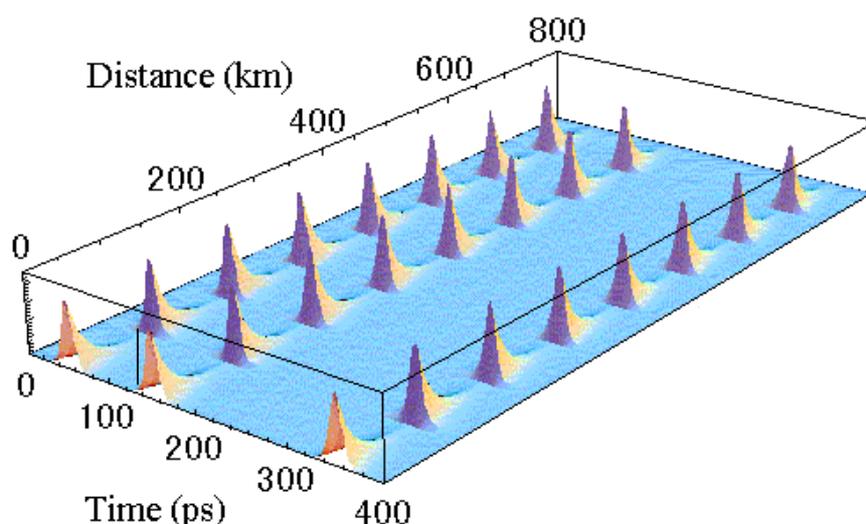


図 2.4.2 伝送波形の計算例 (10 Gbit/s, T=15 ps, La=100 km, aa=0.2 dB/km)

信号伝送品質の評価はQ値を用いて行う。図 2.4.3 にQ値の定義を示す。Q値は受信器の判別回路でのSN比を電圧または電流の次元(パワーの平方根)で表したものである⁽⁴⁵⁾。

$$Q = \frac{\mu_0 + \mu_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \quad (2.4.12)$$

ここで $\mu_{0,1}$ は0および1のレベル、 $\sigma_{0,1}$ はそれらの標準偏差を表す。0および1の各レベルがガウス分布していると仮定すると、次式によりQ値から符号誤り率(BER)を計算することができる⁽⁴⁵⁾。

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{Q}{\sqrt{2}} \right) \approx \frac{\exp(-Q^2/2)}{Q\sqrt{2\pi}} \quad (2.4.13)$$

Q = 6 (15.5 dB) で 10^{-9} 、Q = 7 (16.9 dB) で 10^{-12} 程度の誤り率となる。伝送特性の改善にはFEC (Forward Error Correction) 技術の適用が有効であり、特に長距離海底ケーブル系ではRS (Reed-Solomon) 符号の最適化等が研究されている⁽⁴⁶⁾。

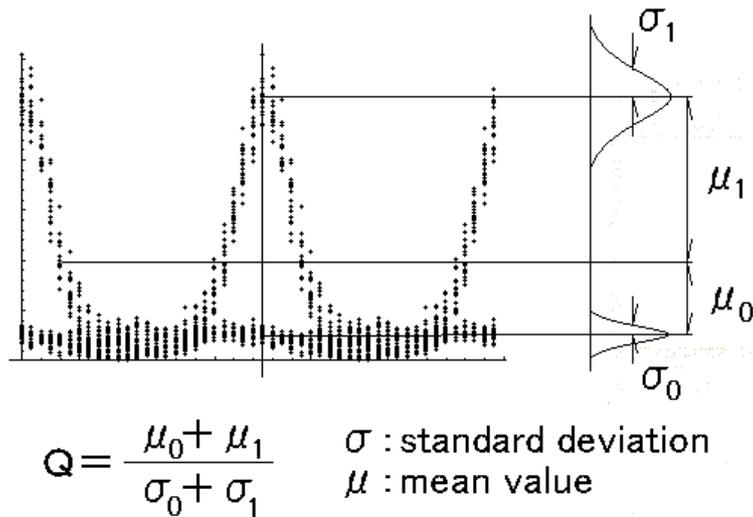


図 2.4.3 R Z 信号に対する Q 値の定義（複数パルス）

本論文では、主に 16 ビットパターンを使用し、ベースバンドの 1.4 倍のフィルタで等化の後 Q 値の評価を行った。R Z システムでは NR Z の場合よりも広帯域の電気フィルタを使用することで感度が 2 dB 程度改善することが知られている⁽⁴⁷⁾。

ソリトン伝送の場合、伝送に及ぼす影響は隣接パルスとの相互作用の影響が支配的であるため、比較的短いビットパターンで伝送特性把握が可能である。特にソリトン伝送ではパルスの安定性が問題となるため、1 パルスの安定性解析も重要である。(2.4.14) および図 2.4.4 に 1 パルスに対するエネルギー保存係数 R 値の定義を示す。

R 値はビットスロット内のパルスのエネルギー残存比率を示すものであり、スロット内のエネルギー W_s をスロット外のエネルギー W_n で割った値の平方根で定義される⁽⁴¹⁾。R 値にはパルス間相互作用や、ジッターの影響が入らないため、伝送品質の評価には使えないが、ソリトンの安定性を評価するパラメータとして、パルスの安定性解析（図 2.3.4）やソリトンからのエネルギーの浸みだし量の評価（図 3.2.17）等に適用できる。

$$R = \sqrt{\frac{W_s}{W_n}} \quad (2.4.14)$$

W_s : ビットスロット内のエネルギー

W_n : ビットスロット外のエネルギー

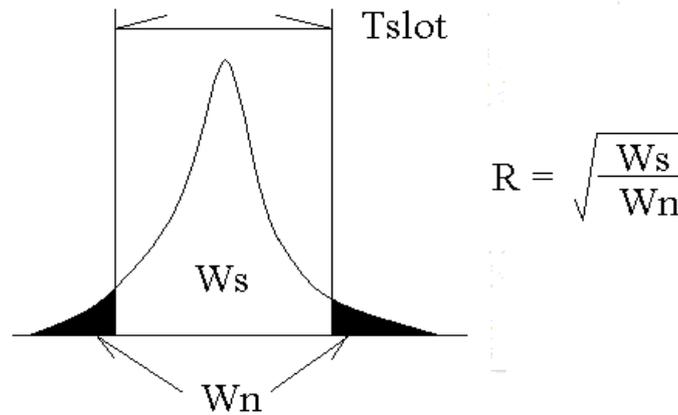


図 2.4.4 R Z 信号に対する R 値の定義 (1 パルス)

2 . 4 . 5 Q マップの導入

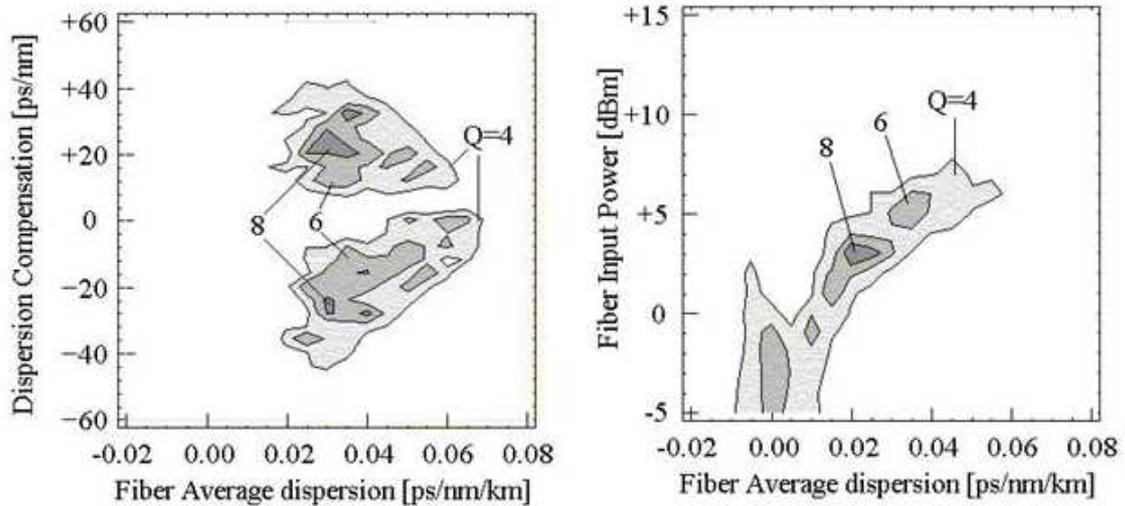
一般に非線形システムを最適化する場合、パラメータ平面上で目的関数のパラメータサーベイを行う。光通信システムも非線形システムの一つであり、この方法が有効である。特に光ソリトンでは、パルスが分散と非線形の釣り合いにより維持されるため、縦軸に信号強度、横軸に線路分散をとった図が有効である⁽⁴⁸⁾。

目的関数としては、伝送後のパルス幅を評価したもの^{(15),(49)}、図 2.4.4 のエネルギー保存計数を評価したもの⁽⁴¹⁾、Q 値を評価したもの⁽¹⁴⁾、等が考えられる。特に Q 値の場合は(2.4.13)から符号誤り率に換算できるため実用上重要であり Q マップと呼ばれる⁽¹⁴⁾。Q マップはパラメータの取り方により各種定義できるが、周期的分散補償を行った場合は、縦軸に分散補償量、横軸に線路の平均分散をとった図が有効であることがわかった⁽⁵⁰⁾。

Q マップを用いて、最適伝送条件や伝送パラメータの許容範囲 (パワーマージン、分散マージン、分散補償マージン等) を定量的に把握することが可能となる。周期的分散補償線路の設計では主に 2 種類の Q マップ : 平均分散 - 分散補償 ($D_{av} - D_c$) および、平均分散 - 信号強度 ($D_{av} - P_{av}$) で伝送特性の概要を把握することが可能である。

図 2.4.5 に 40 Gbit/s、3000 km 伝送に対する Q マップの計算例を示す。図 2.4.1 の非対称型分散補償において増幅器間隔を 50 km とし、増幅器 2 台毎に分散補償を行っている。初期パルス幅を 7.5 ps とし初期チャープ C はゼロである。増幅器雑音は考慮していない。分散スロープは +0.07 ps/nm²/km としている。

$D_{av} - D_c$ の図では、信号強度は+5 dBmに固定されている。平均分散の値が正（異常分散領域）に伝送領域が2カ所、ほぼ対称な位置に存在することがわかる。 $D_{av} - P_{av}$ の図では、分散補償量は+30 ps/nmに固定されている。



(a) 平均分散 - 分散補償 ($D_{av} - D_c$) (b) 平均分散 - 信号強度 ($D_{av} - P_{av}$)

図 2.4.5 40 Gbit/s 線路におけるQマップ（非対称型分散補償）

($N_c = 2$, $L_a = 50$ km, $L_t = 3$ Mm, $P_{av} = +5$ dBm, $D_c = +30$ ps/nm, $NF = -100$ dB)

図 2.4.6 は横軸をチャープパラメータとした場合のQマップの例である。(a)は図 2.4.1の分散マップ（非対称型分散補償）に対する計算結果であり、(b)は図 3.2.1の分散マップ（対称型分散補償）に対する結果である。

非対称型の場合は、パルスに適当な初期チャープを与えることにより伝送特性が改善されることがわかる。 $D_c < 0$ （図 2.4.1(a)）の分散マップでは、 $C < 0$ （アップチャープ）が必要であり、 $D_c > 0$ （図 2.4.1(b)）の分散マップでは、 $C > 0$ （ダウンチャープ）が必要である。

また対称型分散補償の場合は、初期チャープがゼロでもほぼ最適伝送が得られることがわかる。これは送信器および受信器がほぼパルス幅の極小点（チャープフリー点）にくるため、符号間干渉が抑制されることによる（3.3節参照）。次章以降の計算では原則として対称型分散補償を採用し、初期チャープはゼロと仮定する。

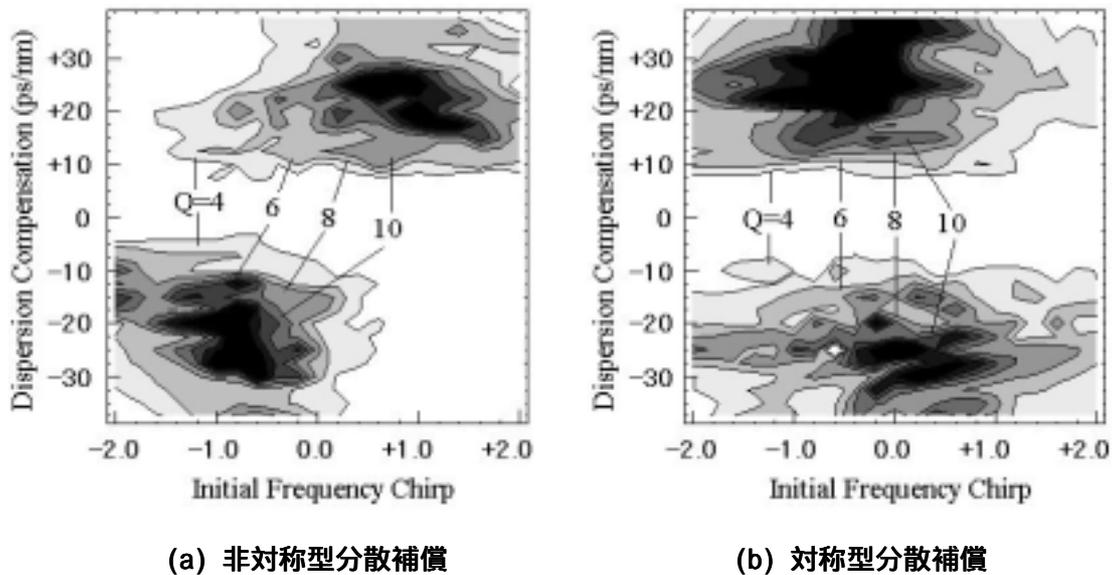


図 2.4.6 初期チャープ、分散補償量をパラメータとしたQマップ

(40 Gbit/s, $L_t = 3000$ km, $L_a = 50$ km, $N_c = 2$, $P_{av} = +5$ dBm, $D_{av} = +0.03$ ps/nm/km)

2.5 結 言

光ファイバ中の光波伝搬を記述する非線形シュレディンガー方程式の数値シミュレーション手法の概要について述べた。数値シミュレーションに用いる「スプリットステップフーリエ法」の概要について説明し、演算子の具体的表現の導出および Mathematica 言語でのコーディングの概要について述べた。

また光ソリトンの性質を利用した計算精度評価手法、および線形伝送と比較した光ソリトン伝送の特徴について考察した。線形伝送と比較して、光ソリトン伝送では分散マージンが伝送距離に基本的に依存しない。また最適信号強度が伝送速度や増幅器間隔に基本的に依存しない。これらの性質は光ネットワーク設計において利点となると予想される。

次に信号の伝送品質の評価手法として、Q値の定義について述べ、伝送パラメータ平面上でQ値を評価する「Qマップ」について説明した。Qマップはファイバの非線形性や分散性が伝送特性におよぼす影響の評価に便利な方法である。周期的分散補償線路では、主に2種類のQマップを用いて、分散補償量、平均分散、信号強度について最適化することでシステムの最適化が可能である。Qマップによる最適設計手法については次章以降で述べる。