付録A　非線形シュレディンガー方程式の導出について

マクスウェルの方程式より、非線形分極P_{NL}を有する媒質中の波動方程式は、

$$\nabla^2 E = \mu \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \tag{A.1}$$

$$D = \varepsilon E + P_{NL} \tag{A.2}$$

で与えられる。Eは電界、Dは電束密度、μは透磁率、εは誘電率である。ここで次の近似をおこなう。（１）P_{NL}は十分小さく線形の摂動として扱う、（２）電界は直線偏波しており伝搬中も偏波状態は保たれる、（３）光パルスのスペクトル広がり$\delta\omega$は、中心周波数ω_0に対して十分に小さい（緩慢包絡線近似：ＳＶＥＡ)。

緩慢包絡線近似を用いて、電界の振動成分を分離すると次式となる。

$$E = \frac{1}{2} u_x [E(r,t) \exp(j\omega_0 t) + c.c.] \tag{A.3}$$

ここで$E(r,t)$は，時間とともにゆっくり変動する電界の包絡線関数であり、u_xは直線偏波を表すｘ方向の単位ベクトルである。また c. c. は複素共役を表す。

カー効果により、ファイバ中の屈折率nは電界強度に依存する。

$$n = n_0 + n_2 | E |^2 \tag{A.4}$$

この時、(A.2)の電束密度は次式で与えられる。

$$D = \varepsilon E + P_{NL} = \varepsilon_0 (n_0 + n_2 | E |^2 - j \frac{\alpha}{k})^2 E \tag{A.5}$$

ここでαは損失定数であり、kは波数ω_0 / cである。　これを展開し、非線形分極および損失が十分小さいとすると、εEおよびP_{NL}は次式で近似される。

$$\varepsilon E = \varepsilon_0 (n_0^2 - j\, 2\, n_0 \frac{\alpha}{k}) E \tag{A.6}$$

$$P_{NL} = 2\, \varepsilon_0\, n_0\, n_2 | E |^2 E \tag{A.7}$$

電界の包絡線関数$E(r,t)$を、横方向のモード分布$R(r,\theta)$とｚ方向の振幅変化$A(z,t) \exp(-j \beta_0 z)$の積で表現する。

$$E(r,t) = R(r,\theta) A(z,t) \exp(-j \beta_0 z) \tag{A.8}$$

ここでβ_0はカー効果および損失の無い場合の伝搬定数である。式(A.3)、(A.8)を(A.1)に代入し、$\nabla^2 E$を計算すると次式を得る。

$$\nabla^2 E = u_x \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e_x \qquad \text{(A.9)}$$

ここでe_xはx方向の電界成分である。

$$e_x = \frac{1}{2} R(r,\theta)\, A(z,t) \exp(-j(\omega_0 t - \beta_0 z)) + c.c. \qquad \text{(A.10)}$$

$\left| \partial^2 A / \partial z^2 \right| << \beta_0^2 \left| A \right|$ として、(A.9)を展開すると次式を得る。

$$\nabla^2 E = \frac{1}{2} u_x \left(\left[\left(A(z,t) \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} \right) + R(r,\theta)\left(-j\,2\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} - \beta_0^2 A \right) \right] \right.$$
$$\left. \exp(j(\omega_0 t - \beta_0 z)) \quad + \quad c.c. \right) \qquad \text{(A.11)}$$

一方、(A.1)の右辺の成分は、(A.6)、(A.7) に (A.3)、(A.8)を代入して次式となる。

$$\mu_0 \frac{\partial^2 (\varepsilon E)}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} u_x k^2 \left(n_0{}^2 - j\,2\,n_0 \frac{\alpha}{k} \right)$$
$$\left(R(r,\theta)\, A(z,t) \exp(j(\omega_0 t - \beta_0 z)) \quad + \quad c.c. \right) \qquad \text{(A.12)}$$

$$\mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} = -u_x k^2 n\, n_2 \left| E \right|^2$$
$$\left(R(r,\theta)\, A(z,t) \exp(j(\omega_0 t - \beta_0 z)) \quad + \quad c.c. \right) \qquad \text{(A.13)}$$

式(A.11), (A.12), (A.13)を(A.1)に代入して整理すると次式となる。

$$\left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} \right) + \left(k^2 n^2 - \beta_0^2 \right) R \right] A$$
$$+ \left(-j\,2\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} - j\,2k\,n\,\alpha A + 2k^2 n\,n_2 \left| E \right|^2 A \right) R \quad = 0 \qquad \text{(A.14)}$$

一方、横方向モード分布$R(r,\theta)$に対して次式が成立する。

$$\left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} \right) + \left(k^2 n^2 - \beta^2 \right) R \right] = 0 \qquad \text{(A.15)}$$

(A.14)、(A.15)より、次式を得る。

$$(\beta^2-\beta_0^2)\,R\,A+(-j2\beta_0\frac{\partial A}{\partial z}-j2kn\alpha A+2k^2nn_2\left|R\right|^2\left|A\right|^2A)\,R=0$$

(A.16)

(A.16)から

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(A.16)*R^*\;r\,dr\,d\theta=0 \tag{A.17}$$

の計算を行って、Rを消去すると次式となる。

$$(\beta^2-\beta_0^2)\,A-j2\beta_0\frac{\partial A}{\partial z}-j2kn\alpha A+2k^2nn_2\,\eta\left|A\right|^2A=0 \tag{A.18}$$

ここで、ηはRの平均化から出てくる係数であり１／２で近似できる。　文献によっては、この係数を考慮していない場合があるが最適信号強度評価等で 3dB の誤差を生ずる可能性がある。

$$\eta=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left|R\right|^4\,r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left|R\right|^2\,r\,dr\,d\theta}\approx\frac{1}{2} \tag{A.19}$$

$\beta\approx\beta_0\approx kn$として(A.18)を２$kn$で割ると次式を得る。

$$(\beta-\beta_0)\,A-j\frac{\partial A}{\partial z}-j\alpha A+\frac{1}{2}kn_2\left|A\right|^2A=0 \tag{A.20}$$

一方、β をω_0の近傍でテイラー展開すると次式となる。

$$(\beta-\beta_0)=(\omega-\omega_0)\,\beta_1+\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\,\beta_2+\frac{1}{6}(\omega-\omega_0)^3\,\beta_3+ \tag{A.21}$$

また、フーリエ変換では次の関係式が成立する。

$$\frac{\partial A}{\partial t}=j\,(\omega-\omega_0)\,A \tag{A.22}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=-(\omega-\omega_0)^2\,A \tag{A.23}$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = -j\,(\omega-\omega_0)^3 A \tag{A.24}$$

(A.21)を(A.20)に代入し、(A.22)～(A.24)の関係式を用いると、包絡線関数 $A(z,t)$ に関する次の方程式を得る。

$$j\left[\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \alpha A\right] = -\frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{j}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + \frac{1}{2} k\, n_2 \left|A\right|^2 A \tag{A.25}$$

この式はカー効果および損失のある線路を伝搬する光パルスの包絡線関数 $A(z,t)$ を記述する方程式であり、非線形シュレディンガー方程式(Nonlinear Schrödinger Equation)と呼ばれる。(A.25)をパルスの群速度 v_gで動く座標系に変換するため、

$$\begin{aligned} A(z,t) &= \phi(z,\tau) \\ \tau &= t - \beta_1 z \end{aligned} \tag{A.26}$$

の変換をおこなうと次式を得る。ただし $\beta_1 = 1/v_g$である。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = j\frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial \tau^3} - \alpha\,\phi - j\frac{1}{2} k\, n_2 \left|\phi\right|^2 \phi \tag{A.27}$$

(A.27)を線形演算子：$\boldsymbol{A}$（分散、分散スロープ、減衰）および非線形演算子：$\boldsymbol{B}$（カー効果、ラマン効果）を用いて書き換えると次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi = [\, A + B \,]\, \phi \tag{A.28}$$

ただし$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$は次式である。

$$A = j\frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} - \frac{\alpha'}{2} \tag{A.29}$$

$$B = -j\frac{1}{2} k\, n_2 \left[\, \left|\phi\right|^2 - T_R \frac{\partial \left|\phi\right|^2}{\partial \tau} \,\right] \tag{A.30}$$

(A.30)の非線形演算子：$\boldsymbol{B}$において、ラマン効果による項を付加した。T_R は、カー効果の時間遅れに起因するもので非線形応答時間と呼ばれる量であり、5 fs 程度の値である。$\alpha' = 2\alpha$ はエネルギー減衰定数である。光通信に使われている数 ps 程度のパルス幅では、これらの項を考慮すれば十分であることが分かっている。