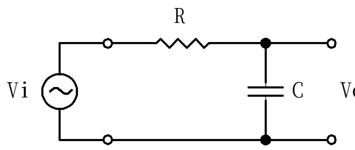
第6章

制御の要素解析

電源を設計するには、制御についての知識を必要としました。いままでは、制御とはどんなものかを簡単に述べていただけでした。しかし、これから本格的に制御を考えた設計をするにあたり、L,C,Rを用いた回路の入出力特性、すなわち入出力間の利得や位相特性を計算できるようになっておく必要があります。この章では、入出力特性を数式で表した、伝達関数について述べることにしましょう。

6-1 伝達関数

ある回路に、ある周波数（正弦波）の入力信号を与えたとき、出力の振幅は入力に対してどうなっているのか（利得）、また位相はどうなっているのか、これを数式で表したものが伝達関数です。例を**図6-1**に示します。なにやら j とかいう表記がでてきて難しそうですが、これは、交流をベクトルとして表すのに複素平面を用いているためなんです。最終的には、この伝達関数という式の意味がわかるようになることと、どうやってこの式を求めるかを理解することがこの章の目的です。この式の意味を理解するためには、まず交流のベクトル表示について理解する必要がありますので、そこから説明をはじめることにします。



この章では、電源回路設計によく用いる回路の伝達関数の求め方を説明します。ちなみにこの回路の伝達関数は

$$T = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

図6-1 伝達関数の例

6-2 交流のベクトル表示

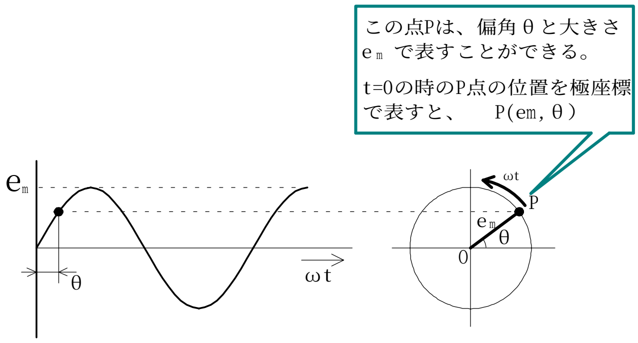
正弦波交流といえば、その瞬時値 $v(t)$ は

$$\underset{}{v(t)} = \underbrace{e_m}_{\text{振幅}} \sin(\underbrace{\omega t + \theta}_{\text{角度}}) \qquad (6\text{-}1)$$

で表すことができました。正弦関数によって表されていることから正弦波という名前がついているわけです。三角関数の中身は角度ですから、ωt、θ は角度となります。直角座標において ,x 軸を角度(=時間の関数)、y 軸を v とすれば、見慣れた**図6-2(a)**のような正弦波が描かれます。

さて、この式を良く見ると、v は大きさ e_m と角度($\omega t+\theta$)の二つのパラメータで決まることがわかるでしょうか。これを図で表すと、**図6-2(b)**のように e_m と角度で一点Pが決まります。このように、角度と大きさで一点を表すことができるとき、この座標Pを極座標といいます。**図6-2(b)**から、v は e_m の y 軸成分であること、そして正弦波交流を極座標表示すると、点Pが、時間経過とともに半径 e_m の円を半時計回りにぐるぐる回っているということがわかるとおもいます。線分OPは大きさ e_m, 方向($\omega t+\theta$)で表される線分ですからベクトルとして扱うことができます(ベクトルは､大きさと方向を持つもの。図上では、方向を矢印の向き、大きさを矢印の長さであらします。なお、極座標上のベクトルの方向は角度になります)。このベクトルOPは、時間とともにぐるぐる回っているわけですから、回転ベクトルと呼ばれます。

このように、正弦波交流は、極座標において回転ベクトルとして表すことができるのです。なお、この極座標で表されるベクトル、複素数を用いるとうまく数値表現することができますので、次に複素数と極座標について説明をすることにします。



(a)　x軸を角度とした場合　　　(b)極座標表示

図6-2 正弦波の表示の仕方

6-3 極座標と複素数

複素数といえば、２乗して -1 となる虚数 j* を含んだ数字で、$a+jb$ なんて表されるあれです。**図6-3**のように、直角座標において、x 軸を実部(Real Partということで Re 軸という場合もある)、y 軸を虚部(Imaginary Partということで Im 軸という場合もある)とした平面（これを複素平面といいます）において、$a+jb$ という複素数は、x 軸が a,y 軸が b の点Pと、中心0の線分OP(長さを r とします)がベクトルとなり、ベクトルの方向はx軸とOPのなす角θとなるのです。式でいえば、長さ r と a,b の関係は

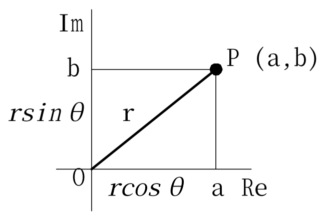


図6-3 複素平面

* 虚数といえば、数学の世界では i が用いられるのですが、電気の世界で i は一般的に電流として用いられてしまっていますから、i に良く似た形の j を虚数として用います。

$$a = r\cos\theta \qquad (6\text{-}2)$$

$$b = r\sin\theta \qquad (6\text{-}3)$$

となります。いま

$$\varepsilon^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad (6\text{-}4)$$

と定義すれば、$a+jb$ は

$$a + jb = r\cos\theta + jr\sin\theta = r(\cos\theta + j\sin\theta) = r\varepsilon^{j\theta} \qquad (6\text{-}5)$$

という、複素平面上における、線0Pの長さ r と偏角で表現できることになります。これは、長さ r、偏角θのベクトルと見ることができます。複素数は、この、r とθというベクトルで表現できるというところがポイントです。この式(6-5)のような表記を極形式といいます。

6-4 交流の極形式への変換・逆変換

複素数も正弦波交流も極座標上でベクトルとして表示することができました。ですから、複素数を正弦波の表示に応用することができます。具体的には、正弦波交流を極形式の形へ変換を行います。いま極形式

$$r\varepsilon^{i\theta} \qquad (6\text{-}6)$$

において、ベクトルの大きさはｒ, 偏角はθを表しました。また正弦波交流

$$v = e_m \sin(\omega t + \theta) \qquad (6\text{-}7)$$

において、ベクトルの大きさは e_m, 偏角はωt+θですから、vを極形式に変換すると

$$v = e_m\varepsilon^{i(\omega t+\theta)} \qquad (6\text{-}8)$$

となります。あとで詳しく述べますが、このように、三角関数を用いて表された正弦波交流を極形式の形に変換すると、位相を含めた計算が簡単にできる、微分・積分がしやすくなるので、微分方程式を解きやすい(回路解析がしやすい)というメリットがあります。とりあえず、いまは三角関数で表された正弦波交流を極形式に変換すると式(6-8)のようになるんだということだけ頭においておいてください。

次に、極形式で表された正弦波交流を三角関数を用いた式に戻すこと(逆変換)を考えてみます。現実の正弦波交流は、実数の値しかとりえません。ですから、**図6-4(a)**のように極形式の実部、もしくは虚部を抜き出せばよいのです。実部・虚部のどちらを抜き出すかですが、これは、**図6-4(b),(c)**のように、もともと扱っていた正弦波が余弦関数で表されていたものなら実部を、正弦関数だったなら虚部を取り出せばよいのです。このあたりについては、このあとでもうちょっと詳しく述べます。

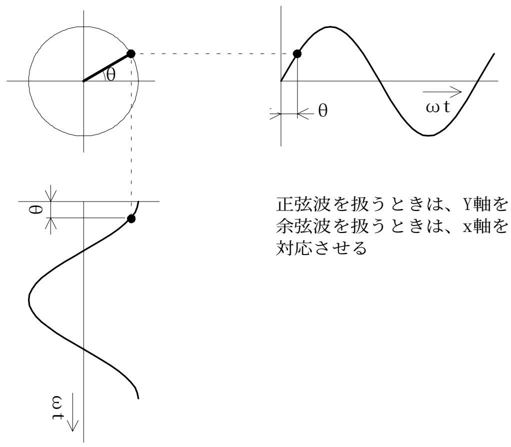
6-5 複素平面上で表された交流・・・・複素周波数

交流を複素平面上で表すと、複素数が入ってきます。今一度式(6-8)をみてみますと、

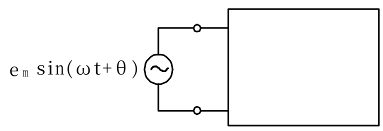
$$v = e_m\varepsilon^{\underline{j(\omega t+\theta)}} \quad \text{ここ} \qquad (6\text{-}9)$$

周波数を表すところが複素数になっていることに気が付きます。周波数が複素数とはいったいどういうことなのか、それをここで考えてみましょう。いま、正弦波交流として

$$v = e_m\cos(\omega t + \theta) \qquad (6\text{-}10)$$



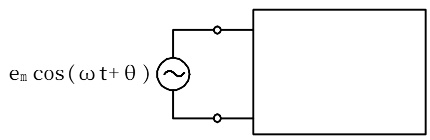
(a) 極座標からの逆変換



このようなsin関数の電源を考えた場合、瞬時値に戻すときは、Y軸、すなわち虚数部をとって

$\mathrm{Im}(e_m\varepsilon^{i(\omega t+\theta)})$

(b) sin関数の場合



このようなcosin関数の電源を考えた場合、瞬時値に戻すときは、x軸、すなわち実数部をとって

$\mathrm{Re}(e_m\varepsilon^{i(\omega t+\theta)})$

(c) cosine関数の場合

図6-4 極座標から瞬時値への逆変換

を考えてみます。なお計算上楽なように、cosin関数を使います。いま、オイラーの公式

$$\varepsilon^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad (6\text{-}11)$$

を変形した

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon^{j\theta} + \varepsilon^{-j\theta}) \qquad (6\text{-}12)$$

を用いて式(6-10)を極形式に変換すると、

$$v = e_m\cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{2}e_m(\varepsilon^{j(\omega t+\theta)} + \varepsilon^{-j(\omega t+\theta)}) \qquad (6\text{-}13)$$

というように、時間領域の関数を極形式の形に直すと、j(ωt+θ)と-j(ωt+θ)という一組の共役複素数である周波数が必要であることがわかります。図で表すと、**図6-5**のように

２つの共役な回転ベクトルP,P*で表されるのです。数式上では合成したものを半分にしていますが、これは、P,P*を合成しただけでは、**図6-5**のとおり、ベクトルの大きさが２倍になってしまうからです。

このように、周波数は共役な複素数でベクトルが回転していると表現できるため、複素数表示しているわけです。

さて、実際に数式計算をするとき、いちいち一組の共役な複素数を扱うのは面倒ですから、これからはPもしくはP*のみを扱うこととします(大抵はPのほうを使う)。共役な一組のベクトルを考えていたときは､実数(時間領域)に戻すとき、共役な一組のベクトルを合成して２で割っていたわけですが、片方Pのみを扱う場合は、**図6-6**から実数部、もしくは虚数部を取ればいいんだということがわかると思います｡これが､ちょっと前にお話した、sine波の場合は虚部をとり、cosine波の場合は実部をとればよいということなのです｡このとき、Pをとるか、P*をとるかにより周波数が正になったり負になったりしますが、複素周波数は正負(共役)の一組で周波数を表すので、結局どちらでもよい、すなわち、時間領域に戻すとき、複素周波数は絶対値をとればよいということになります。

このように正弦波交流の周波数は複素数の虚数部として表すわけですが、実数部はないのでしょうか?｡これを次に考えて見ます。

いま、正弦波交流を次式のように指数関数的に減衰する正弦波とします(**図6-7**)。

$$v = e_m \underbrace{\varepsilon^{\sigma t}}_{\text{これにより時間とともに}v\text{を減衰させることを表している}} \cos(\omega t + \theta) \qquad (6\text{-}14)$$

この式を、ふたたびオイラーの公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned} v &= e_m \varepsilon^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta) = \frac{1}{2} e_m \varepsilon^{\sigma t}(\varepsilon^{j(\omega t+\theta)} + \varepsilon^{-j(\omega t+\theta)}) \\ &= \frac{1}{2} e_m \varepsilon^{\sigma t}\varepsilon^{j(\omega t+\theta)} + \frac{1}{2} e_m \varepsilon^{\sigma t}\varepsilon^{-j(\omega t+\theta)} \\ &= \frac{1}{2} e_m \varepsilon^{j\theta}\varepsilon^{(\sigma+j\omega)t} + \frac{1}{2} e_m \varepsilon^{-j\theta}\varepsilon^{(\sigma-j\omega)t} \qquad (6\text{-}15) \end{aligned}$$

となり、σ+jωとσ-jωという二つの波（共役複素数)で構成されていることになります｡このσも周波数として扱ったとき、この複素数を複素周波数と呼びます。複素周波数の実部・虚部の意味は、実部は減衰を表し、虚部は周波数を表します。このように、複素周波数は、単なる周波数だけでなく､その周波数をもつ信号が時間的にどのように変化するのかということまで表すことができるのです。

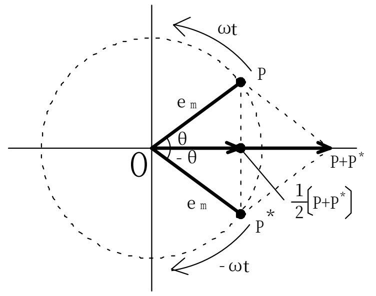
6-6 周波数が同じなら時間項を省略しよう（静止ベクトル）

いままで､交流電圧は式(6-1)のような瞬時値を考えてきました。しかし、増幅器やフィルタのような、入力・出力周波数が同じ回路の入出力特性を考える場合､周波数は同じですから、位相と振幅だけ考えてあげればよく、ωtのt(時間)まで扱う必要はありません。例として、**図6-8**の$v_1(t)$,$v_2(t)$,$v_3(t)$を考えてみましょう。それぞれの瞬時値は、

$$v_1(t) = e_1 \sin(\omega t + \theta_1) \qquad (6\text{-}16)$$

$$v_2(t) = e_2 \sin(\omega t + \theta_2) \qquad (6\text{-}17)$$

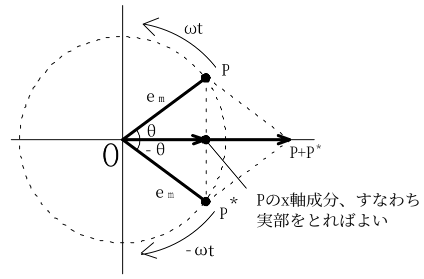
$$v_3(t) = e_3 \sin(\omega t + \theta_3) \qquad (6\text{-}18)$$



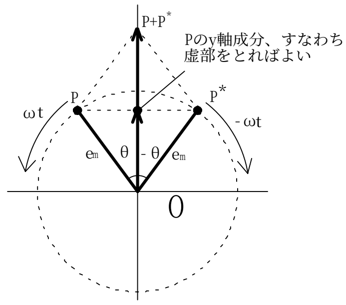
三角関数で表されたv(t)を、指数関数を用いて表現すると、v(t)は２つの回転ベクトルP,P*の合成として表される。

v(t)はもともと実数であるから、共役なベクトルで表されることになる。

図6-5 共役な２つの回転ベクトルで表される



cosine波の場合、P,P*はこのような回転ベクトルとなるので、時間領域に戻すためには、実軸部をとる、すなわちPのReal成分をとればよい。



sine波の場合、P,P*はこのような回転ベクトルとなるので、時間領域に戻すためには、虚軸部をとる、すなわちPのImaginary成分をとればよい。

図6-6 時間領域へ戻す

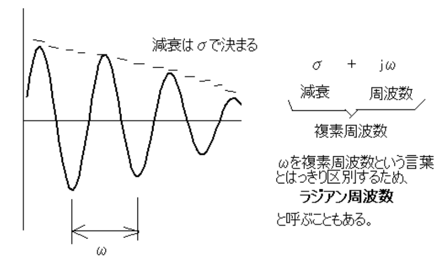
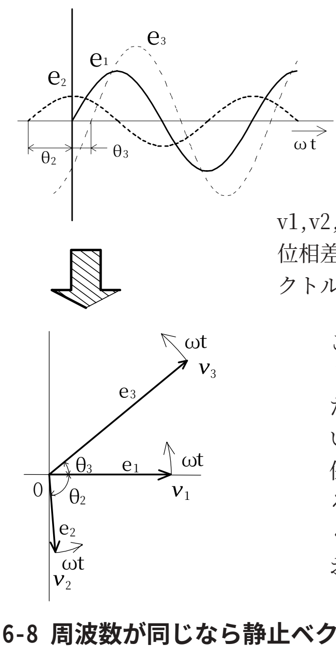


図6-7 時間とともに減衰する波



v1,v2,v3の周波数は同じ。この場合位相差θと大きさeを用いた静止ベクトルで表現できる。

この三本のベクトルが、ベクトルの大きさ・角度の相関をたもったままくるくる回っている。大きさ、角度の相関が保たれているのなら、くるくるまわして考えず(ωtをなくして)、止めて考えてしまおう。これが静止ベクトル。

図6-8 周波数が同じなら静止ベクトルで表現できる

という式となります。ここで、$v_1(t), v_2(t), v_3(t)$ の違いは、大きさである e_1, e_2, e_3、初期位相である θ１，θ２，θ３です。回転ベクトルで考えた場合、これら大きさと位相の関係を保ったまま、３本のベクトルがくるくる回っていることになります。各ベクトル間の偏角が常に同じなら、わざわざベクトルを回転させて考える必要は無いわけで、e_1, e_2, e_3 を大きさ、θ１，θ２，θ３を偏角とした、回転しないベクトルで十分です。このように、時間によって本来時間によって変化する交流信号を、初期位相と振幅のみを用いてることで、時間的な変化を気にしないようにしたベクトル表現を静止ベクトルといいます。実際に $v_1(t)$ を静止ベクトル(複素数)で表すと、**図6-9** より

$$v_1 = e_1\cos\theta_1 + je_1\sin\theta_1 \qquad (6\text{-}19)$$

となります。ちょっと一般化した式ではわかり難いかもしれませんので、実際に値を入れてみることにしましょう。いま、[e_{m1}=1V，θ１=0°]，[e_{m2}=0.5V，θ２=90°]，[e_{m3}=θ３=45°]とすると

	極形式	複素数表示
e_1	$1\varepsilon^{j0}$	$1\cos 0° + j1\sin 0° = 1$
e_2	$0.5\varepsilon^{j90}$	$0.5\cos 90° + j0.5\sin 90° = j0.5$
e_3	$1.5\varepsilon^{j-45°}$	$1.5\cos 45° + j1.5\sin 45° = 1.06 - j1.06$

と表現されます。

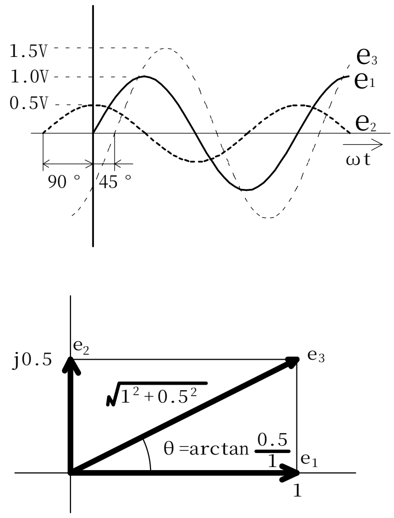


図6-9 静止ベクトルを使うと、こうなる

6-7　静止ベクトルを用いた複素数表示のメリット

1) 同時に偏角・大きさも計算できる

極系式(複素数)のメリットは、複素数のまま計算を行うと、同時に偏角・大きさも計算できてしまうということです。たとえば、**図6-10** のような１と j1 の和のベクトルは、単純な和である 1+j1 となり、偏角は

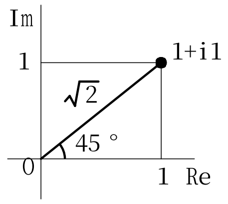
$$\theta = \arctan\frac{b}{a} = \arctan\frac{1}{1} = 45°$$
$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = 1.41$$

と、作図によるベクトル合成から求めた値と一致します。実際にこのことを利用すれば、図6-11の

$$v_1 = e_{m1}\sin(\omega t + \theta_1) \qquad (6\text{-}20)$$
$$v_2 = e_{m2}\sin(\omega t + \theta_2) \qquad (6\text{-}21)$$

の和も簡単に計算できます。まずは瞬時値計算を使ってみると、大変めんどうで

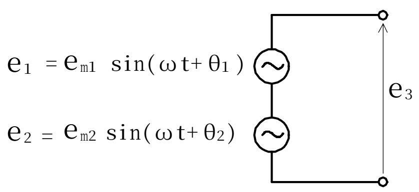
$$v_1 + v_2 = e_{m1}\sin(\omega t + \theta_1) + e_{m2}\sin(\omega t + \theta_2)$$
$$= e_{m1}(\sin\omega t\cos\theta_1 + \cos\omega t\sin\theta_1) + e_{m2}(\sin\omega t\cos\theta_2 + \cos\omega t\sin\theta_2)$$
$$= e_{m1}\sin\omega t\cos\theta_1 + e_{m1}\cos\omega t\sin\theta_1 + e_{m2}\sin\omega t\cos\theta_2 + e_{m2}\cos\omega t\sin\theta_2$$
$$= (e_{m1}\cos\theta_1 + e_{m2}\cos\theta_2)\sin\omega t + (e_{m1}\sin\theta_1 + e_{m2}\sin\theta_2)\cos\omega t$$



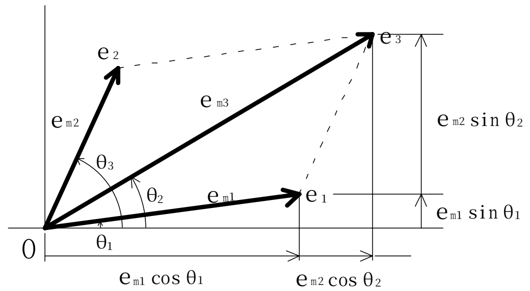
１と j1 を足すと、1+j1. ベクトル上でも、数値計算上でも同じ結果となる。つまり、複素数で数値計算をしていれば、そのままベクトルの計算をしていることになる。

ベクトルの大きさ= $\sqrt{(実部)^2+(虚部)^2}$

図6-10 複素数を使うと、そのままベクトル計算になる



(a) 回路



(b)　和をベクトル合成で求めてみた

図6-11 ２つの正弦波の和を考えてみる

加法定理を応用して得られる公式

$$A\sin\theta + B\cos\theta = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$\sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

を用いて

$$= \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t+\theta_3) \qquad (6\text{-}22)$$

$$A = e_{m1}\cos\theta_1 + e_{m2}\cos\theta_2$$

$$B = e_{m1}\sin\theta_1 + e_{m2}\sin\theta_2$$

$$\sin\theta_3 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (6\text{-}23)$$

となります。この計算を、複素数を用いて計算してみましょう。v_1, v_2 を複素数を用いて表現すると、v_1 の実部は $e_{m1}\cos\theta_1$、虚部は $e_{m1}\sin\theta_1$ ですから

$$v_1 = e_{m1}\cos\theta_1 + je_{m1}\sin\theta_1 \qquad (6\text{-}24)$$

同様に v2 を複素数で表すと

$$v_2 = e_{m2}\cos\theta_2 + je_{m2}\sin\theta_2 \qquad (6\text{-}25)$$

よって v_1 と v_2 の合成は

$$v_1 + v_2 = e_{m1}\cos\theta_1 + e_{m2}\cos\theta_2 + j(e_{m1}\sin\theta_1 + e_{m2}\sin\theta_2)$$

ここで

$$A = e_{m1}\cos\theta_1 + e_{m2}\cos\theta_2 \qquad (6\text{-}26)$$

$$B = e_{m1}\sin\theta_1 + e_{m2}\sin\theta_2 \qquad (6\text{-}27)$$

とすれば

合成波形の大きさ　$e_{m3} = \sqrt{A^2+B^2}$　(6-28)

位相　$\sin\theta_3 = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$　(6-29)

となり、瞬時値計算と一致します。

このように、交流をベクトル(複素数)で表すことにより、計算が非常に楽になり、また振幅の大きさや位相までも計算できてしまうのです。一般化した式を用いましたので、ちょっとわかりにくかったかもしれませんので、なにか実際の値をいれてもう一度計算してみましょう。いま、

瞬時値	**複素数表記**
$v(t) = \sin(\omega t)$	$v = 1V$
$v_2(t) = 0.5\sin(\omega t + 90°)$	$v = j0.5V$

の合成を考えてみましょう。複素数計算なら、単純に

$$v_1 + v_2 = 1 + j0.5$$

というように、簡単に計算できるのです。では、1+j0.5を瞬時値の形式に直してみましょう。e_m(ベクトルの長さ)は、**図 6-10** より

$$\text{ベクトルの大きさ} = \sqrt{(\text{実部})^2 + (\text{虚部})^2} \qquad (6\text{-}30)$$

$$\text{ベクトルの角度} = \arctan\frac{\text{虚部}}{\text{実部}} \qquad (6\text{-}31)$$

ですから

$$\theta = \arctan\frac{0.5}{1} = 26.565°$$

$$r = \sqrt{1^2 + 0.5^2} = 1.118$$

$$e_1 + e_2 = 1.118\sin(\omega t + 26.565°)$$

となります。ちなみに、この合成を瞬時値をもちいておこなうと、式(6-22),(6-23)より

$$A = 1\cos 0 + 0.5\cos 90 = 1$$

$$B = 1\sin 0 + 0.5\sin 90 = 0.5$$

$$\sin\theta_3 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{0.5}{\sqrt{1^2+0.5^2}} = 0.447214$$

$$\theta_3 = \arcsin(0.447214) = 26.565°$$

$$\therefore\ e_1 + e_2 = 1.118\sin(\omega t + 26.565°)$$

となり、一致した結果となります。

2) j を掛けたり割ったりすると位相だけ 90°回る

複素数を用いたメリットとして、もうひとつ、j を掛けたり割ったり(j で割るということは、-j を掛けるということに等しい)すると、大きさは変わらず偏角だけ90°回転させることができるということです。極系式でいうと

$$r\varepsilon^{i\theta} \times i = r\varepsilon^{i(\theta+90^o)} \qquad (6\text{-}32)$$

$$r\varepsilon^{i\theta} \times (-i) = r\varepsilon^{i(\theta-90^o)} \qquad (6\text{-}33)$$

というように、*j* をかけると、大きさは変わらず角度が90°増加し、*j* で割ると(これは-*j* を掛けることに等しい)偏角が 90°減少します(**図 6-12**)。この証明をコラムに載せておきます。このように、*j* を掛けたり割ったりするだけ

コラム　*j* を掛けたり割ったりしたとき

1)*j* を掛けると 90°位相が回る

$$\sin(\theta+90) = \cos\theta \qquad \cos(\theta+90) = -\sin\theta \quad \text{より}$$

$$j \times r\varepsilon^{j\theta} = j \times r(\cos\theta + j\sin\theta) = jr\cos\theta - r\sin\theta = j\sin(\theta+90) + r\cos(\theta+90) = r\varepsilon^{j(\theta+90)}$$

2)-*j* を掛けると -90°位相が回る

$$\sin(\theta-90) = -\cos\theta \qquad \cos(\theta-90) = \sin\theta$$

$$-j \times r\varepsilon^{j\theta} = -j \times r(\cos\theta + j\sin\theta) = -jr\cos\theta + r\sin\theta = jr\sin(\theta-90) + r\cos(\theta-90) = r\varepsilon^{j(\theta-90)}$$

で偏角が90°回転するということは、電気の世界にとって大変都合がよく、この性質を利用すると、コイルや、コンデンサのインピーダンスを複素数で綺麗に表示できます。たとえば、コイルの場合、電圧に対し電流は90°遅れますから、インピーダンスは純粋な複素成分で表現できます。例を示しましょう。コイルのインピーダンスは

$$X_L = \omega L \qquad (6\text{-}34)$$

でした。このインピーダンスに電圧を掛けて、電流を流すと、電流の位相が90°遅れるということですから、コイルのインピーダンスは複素数で

$$X_L = j\omega L \qquad (6\text{-}35)$$

と表現できるのです。つまりコイルに電圧Vを印加したとき、コイルに流れる電流は、

$$I_L = \frac{V}{j\omega L} = -j\frac{V}{\omega L} \qquad (6\text{-}36)$$

と、数式上でちゃんと90°遅れるとでてくるのです。同じようにコンデンサに電圧を加えたとき、コンデンサに流れる電流の位相は90°進みますから

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} \qquad (6\text{-}37)$$

$$I_C = \frac{V}{\frac{1}{j\omega C}} = jV\omega C \qquad (6\text{-}38)$$

と、なります。このように複素数を用いて計算すれば、同時に位相の計算までできてしまうのです。では、複素数を用いて、一番最初にでてきた、**図6-1**の入出力特性、すなわち伝達関数を計算してみることにしましょう。

6-8 伝達関数を求めてみよう

伝達関数とは、入力電圧に対し、出力電圧がどうなるのかを表した関数です。ようは

$$\frac{V_O}{V_i} \qquad (6\text{-}39)$$

が、周波数に応じてどうなるのかということですが、複素数を用いれば、位相を含めて表現できるわけです。いま、**図6-1**の伝達関数を求めてみましょう。入力からみたインピーダンスは

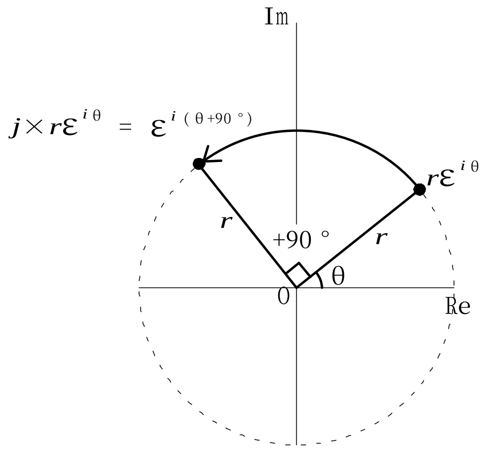
$$Z = R - j\frac{1}{\omega C} \qquad (6\text{-}40)$$

となります。したがって、この回路に流れる電流は、オームの法則より

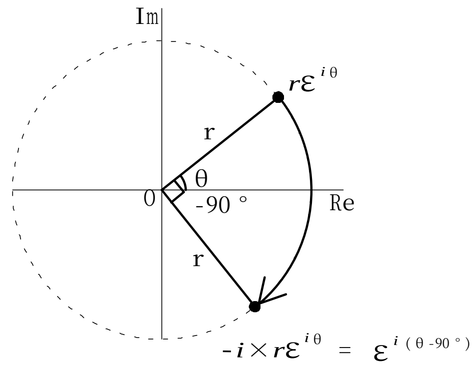
$$i = \frac{V_i}{R - j\frac{1}{\omega C}} \qquad (6\text{-}41)$$

となります。コンデンサにかかる電圧が出力電圧 V_O になりますから、V_O は

$$V_O = i \times \left(-j\frac{1}{\omega C}\right) = \left(\frac{V_i}{R - j\frac{1}{\omega C}}\right) \times \left(-j\frac{1}{\omega C}\right) = \frac{1}{1 + j\omega CR} \times V_i \qquad (6\text{-}42)$$



(a) j を掛けた場合



(b) -j を掛けた場合

図6-12 複素数に i を掛けたり割ったり(-j を掛ける)すると

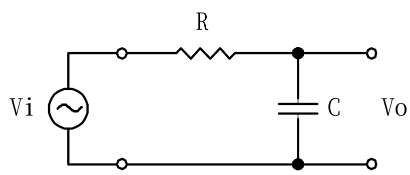


図6-13 CR回路

となります。しかるに伝達関数Tは

$$T = \frac{1}{1 + j\omega CR} \qquad (6\text{-}43)$$

となります。この伝達関数により、ある周波数の信号を入力したとき、その入力に対して、出力の振幅はどうなるのか、位相はどうなるのかを知ることができるわけです。なお、正確には周波数に対する伝達関数ということで、周波数伝達関数といいます。また伝達関数においてて$j\omega$項が1次の式であらわれるとき、その回路(要素)を１次遅れ要素といいます。
では、この周波数伝達関数から、入出力特性を計算してみましょう。利得は、V_o/V_iを虚数計算してあげて、その結果の絶対値、すなわち得られた虚数の実部と虚部の２乗和のルートをとればよく、

$$\left|\frac{V_O}{V_i}\right| = |A+jB| = \sqrt{A^2+B^2} \qquad (6\text{-}44)$$

つまりこういうこと

したがって

$$\left|\frac{V_O}{V_i}\right| = \left|\frac{1}{1+j\omega CR}\right| = \left|\frac{1-j\omega CR}{(\omega CR)^2+1}\right| = \left|\frac{1}{(\omega CR)^2+1} - j\frac{\omega CR}{(\omega CR)^2+1}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{(\omega CR)^2+1}\right)^2 + \left(\frac{\omega CR}{(\omega CR)^2+1}\right)^2} \qquad (6\text{-}45)$$

そして、位相は、

$$\theta = \arctan\frac{-\dfrac{\omega CR}{(\omega CR)^2+1}}{\dfrac{1}{(\omega CR)^2+1}} = \arctan(-\omega CR) \qquad (6\text{-}46)$$

となります。こうして、この式をグラフにすると、CR 回路が周波数に応じてどのような利得になるのか、また位相はどうなるのかがわかります。例として、R=100 Ω、C=1uF のときの計算結果を**図 6-14** に示します。抵抗の値と、コンデンサのインピーダンスの値が等しくなったところで、利得が-3dB (=0.707 倍)おち、そこから -6dB/oct (-20dB/DEC) の割合で利得がおちていきます。この利得が -3dB 落ちた点をカットオフ周波数といいます。カットオフ周波数は

$$R = \frac{1}{\omega C} \qquad (6\text{-}47)$$

より

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 1u} = 1.59kHz \qquad (6\text{-}48)$$

となります。

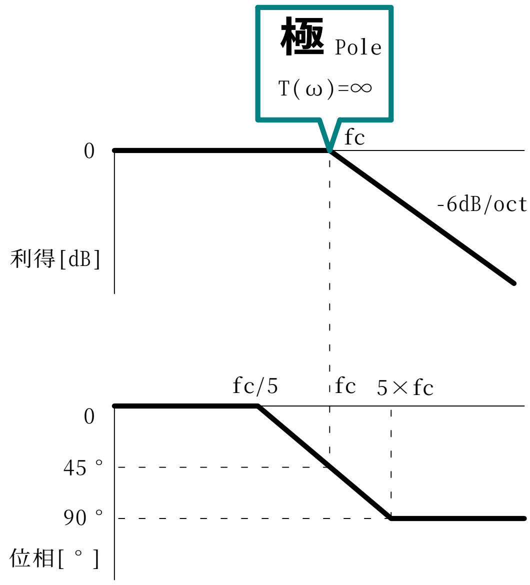
　こうして、CR 回路の伝達関数を求めてきたわけですが、同じようにLCR 回路などの伝達関数も求めることができます。電源という制御回路では、CR 回路、そして LC 回路の周波数特性を知っておく必要がありますので、次にこれら回路の伝達関数と周波数特性について述べることにします。

6-9 極(Pole)と零

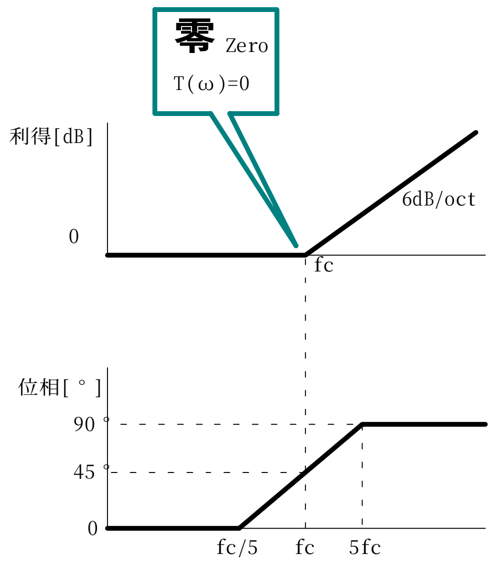
　伝達関数において T(ω)=0 となる周波数ωを零、T(ω)=∞となる周波数ωを極(ポール)と呼びます。周波数特性を漸近線であらわしたとき、零・極の周波数において折れ点が発生します。入力周波数を低い周波数から高い周波数へと掃引したとき、極が現れると位相が遅れ、利得が下がり、零が現れると位相が進み、利得が上昇します。図 6-14 に、1 次回路において零や極があったときの特性を示します。1 次回路の場合、零や極が発生すると、その周波数より 6dB/oct (=20dB/DEC) の割合で利得が変化します。また、位相特性は、折れ点周波数 fc の 1/5 および 5 倍の周波数にそれぞれ折れ点が発生します。

6-10 いろいろな回路の伝達関数

　電源を設計する上でよく使う回路とその伝達関数をここで計算します。重要なポイントは、それぞれの回路の折れ点周波数と減衰特性、位相特性です。これらの特性を覚えておけば、いざ設計をするときに、これらの回路をどう組み合わせることで、自分の目標とするボード線図作り上げるのかを思い浮かべることができます。ここでは、伝達関数を求めて、そこから周波数特性をグラフにするだけにとどめ、実際にどのようにこれら特性を応用するのかは次章にまわすことにします。ようは、よく使われる回路の伝達関数を求めることにより、いったい伝達関数はどのようにして求めるのか、その方法を習得しようというわけです。習得できれば、実際に電源を設計しているとき、「この場所にコンデンサを入れたらボード線図はどのようになるだろうか?」とか、「回路が発振してたまらん。どこにどのくらいの値のコンデンサを入れれば発振が止まってくれるのだろうか」ということが計算により導き出せるようになります。



(a) 極がある場合



(b) 零がある場合

図 6-14 1 次回路における零と極が発生したときの利得・位相特性

1)CR 回路　その 1

　図 6-15(a) の回路の伝達関数を求めてみましょう。この回路は、すでに述べた**図 6-1** の回路で、すでに伝達関数や利得・位相の関係は述べましたので、それらの導きについ

て、ここでは述べません。特徴だけ言いますとこの回路は、利得を落とすとともに、位相を90°までまわすことです。制御において、負帰還の－180°の状態からさらに-180°位相が回ると発振するわけですが、このCR回路は位相を-90°までしか回しませんし（つまり、まだ90°余裕がのこる）、利得のほうは周波数があがれば-6dB/octでどんどん落ちていってくれますから、遅れ位相補償として使えるわけです。この回路の伝達特性を**図6-15(a)**に示します。

次に、この回路の零と極を求めてみましょう。伝達関数は

$$T(\omega)=\frac{1}{1+j\omega CR} \qquad (6\text{-}49)$$

ですから

・極

$$1+j\omega CR=0$$

$$-j\omega=\frac{1}{CR}$$

$$\therefore f=\frac{1}{2\pi CR} \qquad (6\text{-}50)$$

・零

なし

となります。この極ですから、この周波数に折れ点をもち、利得は-6dB/octの傾きが加算されるということになります。位相のほうは、利得の折れ点周波数にて-45°となり、漸近線はfc/5,5fcの周波数に折れ点ができます。

2)CR回路　その2

図6-15(b)の回路の伝達関数を求めてみましょう。この回路は、進み位相補償をするときに用いられる回路です。

$$T=\frac{V_O}{V_i}=\frac{R_2}{\dfrac{-j\dfrac{1}{\omega C}}{R_1-j\dfrac{1}{\omega C}}+R_2}=\frac{R_2+j\omega CR_1R_2}{R_1+R_2+j\omega CR_1R_2} \qquad (6\text{-}51)$$

利得は、絶対値ですから、式(6-49)の右辺を実部と虚部に分離して、2乗和の平方根をとって

$$\left|\frac{V_O}{V_i}\right|=\left|\frac{(\omega CR_1R_2)^2+(R_1+R_2)R_2}{(\omega CR_1R_2)^2+(R_1+R_2)^2}+j\frac{(R_1+R_2)\omega CR_1R_2-\omega CR_1^2R_2}{(\omega CR_1R_2)^2+(R_1+R_2)^2}\right|$$

$$=\sqrt{A^2+B^2} \qquad (6\text{-}52)$$

$$A=\frac{(\omega CR_1R_2)^2+(R_1+R_2)R_2}{(\omega CR_1R_2)^2+(R_1+R_2)^2}$$

$$B=\frac{(R_1+R_2)\omega CR_1R_2-\omega CR_1^2R_2}{(\omega CR_1R_2)^2+(R_1+R_2)^2}$$

$$\theta=\arctan\frac{B}{A} \qquad (6\text{-}53)$$

となります。この式をもとに周波数に対して利得や位相がどうなるのかを計算してみましょう。いま、R1=1kΩ,R2=100Ω、C=0.1uFとして計算すると、**図6-15(b)**のようになります。周波数が低いとき、利得はR1とR2の比で決まり、周波数が高くなると利得が0dBとなります。ここで注目するのは位相特性で、利得が上がり始めると位相も進み始め、ある極大値まで上がったあと、ふたたび位相0°へと戻るということです。この位相特性をうまく利用することにより、進み位相補償をかけることができます。実際にどのようにやるのかは、次章において実践してみますのでお楽しみに。

次に、この回路でも極と零を計算してみましょう。伝達関数は

$$T(\omega)=\frac{R_2+j\omega CR_1R_2}{R_1+R_2+j\omega CR_1R_2} \qquad (6\text{-}54)$$

ですから

・零

$$R_2+j\omega CR_1R_2=0$$

$$-j\omega=\frac{1}{CR_1}$$

$$f_1=\frac{1}{2\pi CR_1}=\frac{1}{2\pi\times 0.1uF\times 1k}=1.59kHz \qquad (6\text{-}55)$$

・極

$$R_1+R_2+j\omega CR_1R_2=0$$

$$-j\omega=\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}$$

$$\therefore f_2=\frac{R_1+R_2}{2\pi CR_1R_2}=\frac{1k+100}{2\pi\times 0.1u\times 1k\times 100}=17.5kHz \qquad (6\text{-}56)$$

図6-15(b)は、$f_1<f_2$としたときの特性です。f_1で零が発生し、位相が進み、利得が6dB/octの割合で上昇します。ついでf_2で極が発生し、位相は遅れはじめ、利得は-6dB/octが加わり、0dB/octと変化がなくなります。

2)反転増幅器＋遅れ位相補償回路

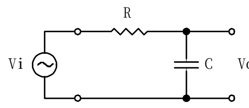
誤差増幅器にコンデンサを付け足してあげると、誤差増幅と位相補償を兼用させることができます。**図6-15(d)**は、誤差増幅器(OPアンプを用いた反転増幅器)に遅れ位相保補償を付け足したもので、Cの値により、お好みの周波数で利得を落とすことができます。この回路の利得は

$$\frac{V_O}{V_i}=-\frac{R_f}{R_i} \qquad (6\text{-}57)$$

で、表されました。Cがついてもこの式は変わりなく

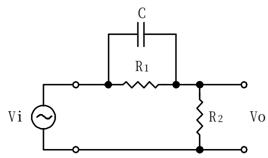
$$\frac{V_O}{V_i}=-\frac{R_f\,//-jX_C}{R_i} \qquad (6\text{-}58)$$

で表すことができます。この式の絶対値をとれば、利得が出ますし、実部と虚部のarctanをとれば位相がでてきます。では実際に計算して見ましょう。まずは、伝達関数を求めてみると



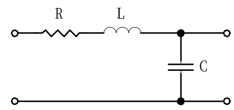
遅れ位相保証に良く使われる

極 ： $f_C = \dfrac{1}{2\pi CR}$　　　零 ：なし



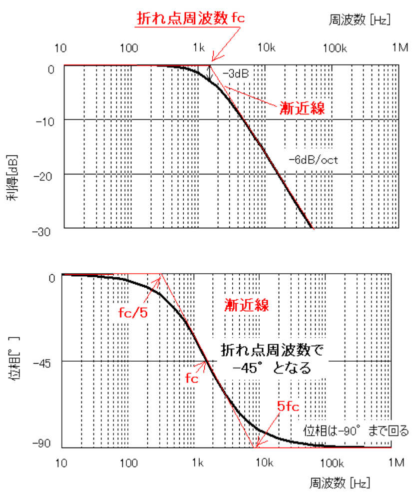
進み位相保証に使われる

極 ： $f_1 = \dfrac{1}{2\pi CR_1}$　　零 ： $f_2 = \dfrac{R_1 + R_2}{2\pi CR_1 R_2}$

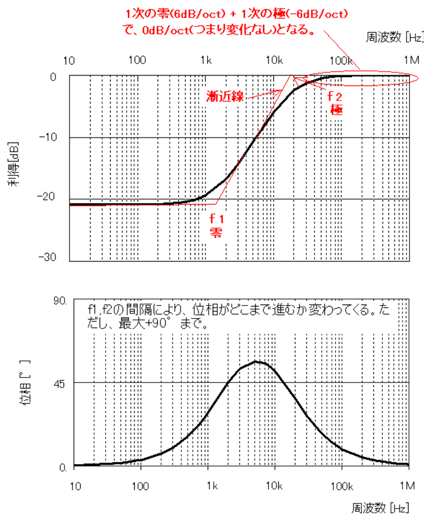


スイッチング電源の出力回路の形

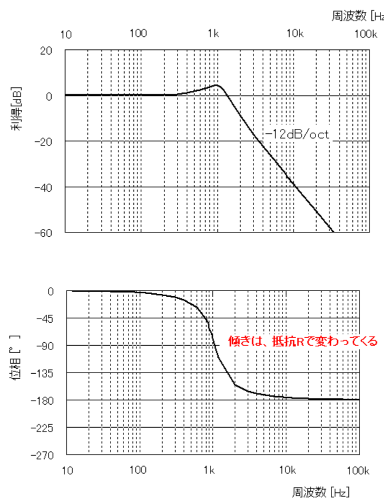
極 ： $f = \dfrac{CR \pm \sqrt{C^2R^2 - 4LC}}{4\pi LC}$　　零 ：なし



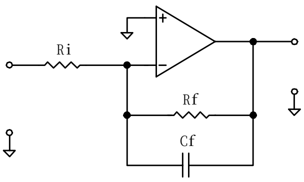
(a) 遅れ位相保証回路



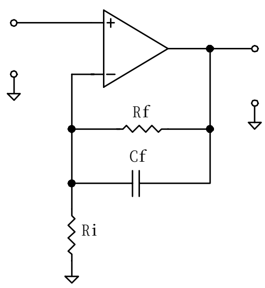
(b)進み位相保証回路



(c)LCR 回路

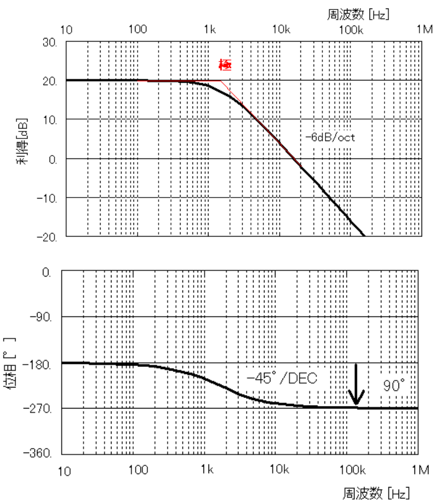


極 ： $f = \dfrac{1}{2\pi CR_f}$　　　零 ：なし

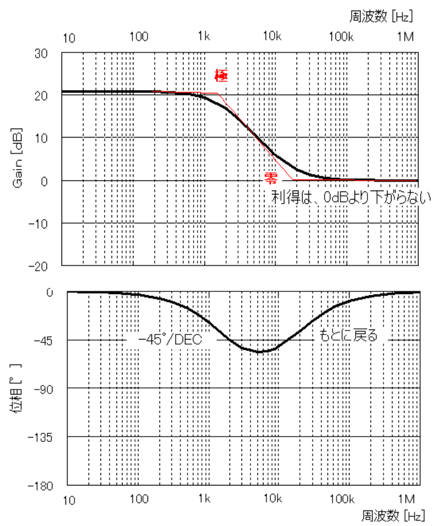


この回路を使うときは注意。
Cf があっても、利得が 0dB より下がりません。

極 ： $f = \dfrac{1}{2\pi CR_f}$　　零 ： $f = \dfrac{R_i + R_f}{2\pi CR_f R_i}$



(d) 反転増幅器＋遅れ位相保証回路



(e) 非反転増幅器＋遅れ位相保証回路

図 6-15 いろいろな回路の周波数特性

$$T(\omega)=\frac{V_O}{V_i}=-\frac{R_f//(-jX_C)}{R_i}=-\frac{\dfrac{\dfrac{R_f}{j\omega C}}{R_f+\dfrac{1}{j\omega C}}}{R_i}=-\frac{R_f}{R_i+j\omega CR_iR_f}$$

(6-59)

ですから、零はなし、極は

$$f=\frac{1}{2\pi CR_f} \qquad (6\text{-}60)$$

となります。極だけですから、この周波数で、利得が3dB落ち、位相が45°遅れることがわかります。直流時の利得は、コンデンサが無いときの利得と同じです。この伝達関数の極から求めた利得・位相特性が、実際の特性とあっているかちょっと確認してみましょう。
この回路の利得を計算していくと

$$\frac{V_O}{V_i}=-\frac{R_fR_i}{(\omega CR_iR_f)^2+R_i^2}+j\frac{\omega CR_iR_f^2}{(\omega CR_iR_f)^2+R_i^2} \qquad (6\text{-}61)$$

$$\left|\frac{V_O}{V_i}\right|=\sqrt{A^2+B^2} \qquad (6\text{-}62)$$

$$A=\frac{R_fR_i}{(\omega CR_iR_f)^2+R_i^2} \qquad B=\frac{\omega CR_iR_f^2}{(\omega CR_iR_f)^2+R_i^2}$$

$$\theta=\arctan\frac{B}{A} \qquad (6\text{-}62)$$

となります。いま、C=0.1uF,Rf=1kΩ,Ri=100Ωとして計算してみましょう。この結果を**図6-15(c)**に示します。このアンプの直流増幅度は20dB、そして周波数が高くなるとCにより利得が落ちてゆきます。極は、計算値どおり1.59kHzになっており、伝達関数の極から求めた漸近線と一致します(あたりまえですが)。なお、位相は、反転増幅器ですから、最初（直流）から-180°回っており、周波数があがるにつれ、さらに90°回転するという特性をもちます。こうしてみると、この回路は、図6-?におけるCR回路と反転増幅器が組み合わさったものであるということがわかると思います。

ちなみに利得が-3dB低下し、位相が45°回るということは、式(6-61)において実部=虚部となる周波数ということですから、この考え方からでも

$$f=\frac{1}{2\pi R_f C} \qquad (6\text{-}63)$$

という式を導き出すこともできます。

3)非反転増幅回路＋遅れ位相保証

こんどは、非反転増幅回路の帰還抵抗にコンデンサをつけた場合を考えてみましょう。反転増幅器のときと同じように、伝達関数を求めてみますと、

$$T(\omega)=\frac{V_O}{V_i}=1+\frac{R_f//(-jX_C)}{R_i}=1+\frac{\dfrac{\dfrac{R_f}{j\omega C}}{R_f+\dfrac{1}{j\omega C}}}{R_i}=\frac{R_f+R_i+j\omega CR_iR_f}{R_i+j\omega CR_iR_f}$$

(6-64)

よって、極は

$$f=\frac{1}{2\pi CR_f} \qquad (6\text{-}65)$$

零は、

$$f=\frac{R_i+R_f}{2\pi CR_fR_i} \qquad (6\text{-}66)$$

となります。そして直流時の利得は、コンデンサのない非反転増幅回路とおなじですから、これらから漸近線を書くことができます。反転増幅器と同じ部品定数で計算すると、極は1.59kHz、零は17.5kHzとなります。ちょっと面倒ですが、反転増幅器のときと同じように利得・位相を計算してみると

$$\frac{V_O}{V_i}=\frac{(\omega CR_iR_f)^2+R_i^2+R_iR_f}{(\omega CR_iR_f)^2+R_i^2}-j\frac{\omega CR_iR_f^2}{(\omega CR_iR_f)^2+R_i^2} \qquad (6\text{-}67)$$

$$\left|\frac{V_O}{V_i}\right|=\sqrt{A^2+B^2} \qquad (6\text{-}68)$$

$$A=\frac{(\omega CR_iR_f)^2+R_i^2+R_iR_f}{(\omega CR_iR_f)^2+R_i^2} \qquad B=-\frac{\omega CR_iR_f^2}{(\omega CR_iR_f)^2+R_i^2}$$

$$\theta=\arctan\frac{B}{A} \qquad (6\text{-}69)$$

となります。この結果から、利得と位相の周波数特性をグラフにすると**図6-15(e)**のようになります。反転増幅器との大きな違いは、利得は1以下にならないこと、そして位相特性が、一度おくれたあと再びもとに戻るということです。この非反転増幅器を制御系のなかに用いた場合、いくらCをいれても、この増幅器の利得は1以下になりませんから、このアンプ以外のところで利得があった場合、制御系の閉ループ利得を1以下に落とせないことになりますから注意してください。

5)LCR回路

スイッチング電源には必ずつきもののLCR回路について、伝達関数を求めてみましょう。

$$T(\omega)=\frac{V_O}{V_i}=\frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+(j\omega)^2LC+j\omega CR} \qquad (6\text{-}70)$$

よって、極は

$$f = \frac{CR \pm \sqrt{C^2R^2 - 4LC}}{4\pi LC} \qquad (6\text{-}71)$$

となります。同様に、実際にグラフを書くために虚数計算を行うと

$$\left|\frac{V_O}{V_i}\right| = \left|\frac{1}{1-\omega^2 LC + j\omega CR}\right| = \left|\frac{1-\omega^2 LC - j\omega CR}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}\right|$$

$$\left|\frac{V_O}{V_i}\right| = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad (6\text{-}72)$$

$$A = \frac{1-\omega^2 LC}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}$$

$$B = \frac{-\omega CR}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{B}{A} \qquad (6\text{-}73)$$

となります。この結果から、利得と位相の周波数特性をグラフにすると図6-15(c)のようになります。いままでのCR回路と比べ、減衰率が12dB/octと倍になっていること、また位相が180°までまわることが特徴となっています。なお、このように伝達関数がjω項が２次の式で表されるような回路(要素)を２次遅れ要素といいます。位相特性は、抵抗Ｒによって変わりますが、CR回路にくらべ、かなり急峻に位相が回転します。スイッチング電源で用いるLやCは大きな値ですから、極はかなり低い周波数になります(1kHz程度)。そのため、遅れ位相補償だけでスイッチング電源をつくろうとすると、かなり応答特性の悪い電源回路ができます。次の章で、実演してみますので、お楽しみに。

2002年 6月 s.watabe(JE1AMO)