

静磁界

磁界というのは、電界よりも耳なじみな世界だと思います。方位磁石や電磁石、そして健康用品など、身の回りに磁石を使った製品が多いからかもしれません。ここでは、その磁界について説明します。磁界という世界も電界と同じで、磁力が働く世界をいいます。ただ、静電界と異なるのは、電流により作られる磁界があること、そして電荷のように単極で存在することがなく、必ずN極とS極が対で存在するということです(電子や陽子に対応する磁子というものが存在しない。ただ、いろいろなことの説明上、この存在しない磁子を用いる場合もあります。

2-1 磁界におけるクーロンの法則

第一章で静電界におけるクーロンの法則をやりました。磁界においてもほとんど同じ式で通用いたします。

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2-1)$$

ここで m は磁極といい、単位は [Wb] (ウェーバーと読む) で表します。電界の時のクーロン力でもお目見えいたしました比例定数 k がここでも登場しております。

$$k = \frac{1}{4\pi\mu_0} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]} \quad (2-2)$$

真空の透磁率
permeability

が、比例定数 k の値で、 μ_0 を透磁率といいます。さて、電荷 Q をおいて力が及ぼされる空間は電界であることを静電界のところでも述べました。磁界も同じことで、磁気的な作用が及んでいる空間、つまり磁極をおいたときに磁気力が働く空間を磁界といいます。そして磁界の強さの定義は磁界中に単位正磁極をおいたとき、これに作用する力の大きさを [N] で表したものをその点の磁界の強さとして、その力の方向を磁界の方向としております。磁界の強さは記号 H を使い、単位は [A/m : アンペア毎メートル] です。式で表しますと、

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \times \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2-3)$$

です。ここで、 m_2 (m_1 でもいいけど) を単位正磁極にしますと、

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \times \frac{m_1 \times 1}{r^2} \quad (2-4)$$

そして、 m_1 を m にして (m の添え字はもう必要ない)、定義どおりに F を H にすれば

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \times \frac{m}{r^2} \quad (2-5)$$

となります。もちろん、 F も H もベクトルとして表すのが本当で、

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \times \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r} \quad (2-6)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \times \frac{m}{r^2} \times \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r} \quad (2-7)$$

となります。なお、力の方向ですけれども、電荷と同じ

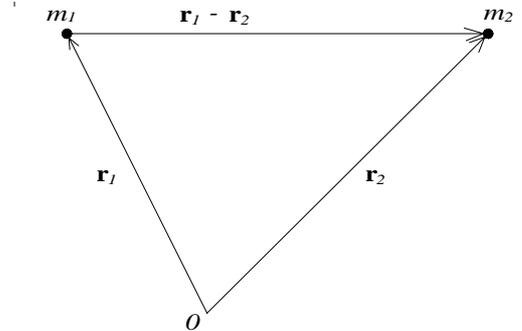


図2-1 磁界のベクトル表示

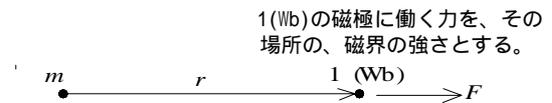


図2-2 磁界の強さ

ように符号が同じならば反発力を、違うのなら吸引力を表します。磁界について述べたところで今度は磁力線について述べることにいたしましょう。

2-2 磁力線と磁束

磁力線の話となるとかならずといっていいほどあげられるのが図2-3です。この図は棒磁石の上に厚紙などをおいて、鉄粉を一樣に散布し、一端を軽くたたいて得られたものです。この鉄粉の描いた線と同様な曲線を仮想して磁極のN極からS極へ向かう力の線を磁力線といいます。磁力線の接線方向が、その点の磁界の方向を表していることなど、内容としては電気力線と同じです。

さて、なぜこんなものができるのかを考えてみますが、このとき鉄粉がひとつひとつの磁石になったと考えれば磁力線の性質まで容易に理解できます。磁力線は図2-5(b)のようにN極からS極へ最短距離で結ばれようとする。ところが図2-5(a)のように棒磁石どうしを近づけると反発し合うように、磁力線どうしは反発し合うのです。こうして磁力線は常に最短距離で結ばれるような、つまり縮まろうとするのと同時に、磁力

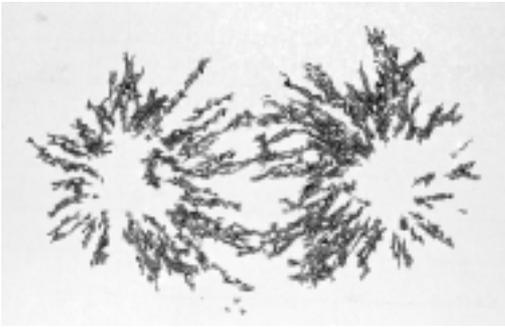


図2-3 磁石の周りにできた磁界の様子

線どうしが互いに反発し合っ広がってしまう力が作用しているのです。

次に磁力線と磁界の強さの関係を見てみます。先に、磁界の強さHというのを出しましたが、これと磁力線は

1[m²]あたり H本の磁力線がでている。

$$H[A/m]$$

$m[Wb]$ の磁極からは $N=m/\mu_0$ [本] である。

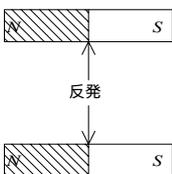
という関係(というより取り決めかな?)を持ちます。Hと磁力線の本数の関係は取り決めだからいいとして、どうして磁極 m から出てくる磁力線数がこうなるのか少々疑問がでると思いますので説明いたします。図2-6において球表面における磁力線密度は $m/(4\mu_0 r^2)$ [本] です。したがって球全表面からでていく磁力線数は密度に表面積をかけて、

$$N_0 = \frac{m}{4\pi\mu_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{m}{\mu_0} \quad (2-8)$$

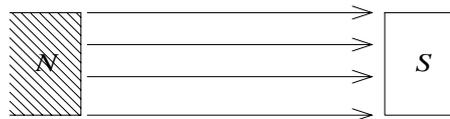
となるわけです。ところで今まで正磁極についてのみ述べてまいりましたが、

負磁極(S磁極のことです)の場合は反対に N_0 本の磁力線が入ってくるという

ことを意味します。さて、電気力線に電束という考え方があったように磁力線にも磁束という考え方があります。内容としては電束と全く同じで $m[Wb]$ から m [本] の磁束がでているとして、記号はB、単位はT(テスラと読む)です。昔は[T]ではなく、 $[Wb/m^2]$ という大変わかりやすい単位を使っていたたのですけれども、何故[T]にしてしまったのでしょうか…。話がそれました。ここで磁束密度Bと磁界の強さHの関係を求めてみるこ



(a)



本当は、このように最短距離で行きたいのですが

(b)

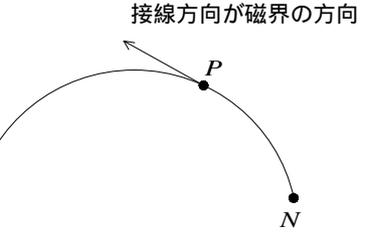


図2-4 磁力線

にしましょう。図2-5においてP点の1[m²]あたりの磁束密度は

$$B = \frac{m}{S} \quad (2-9)$$

ここでSは $4\pi r^2$ なので

$$B = \frac{m}{4\pi r^2} \quad (2-10)$$

よって、次にP点の磁界の強さを求めてみると

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{r^2} \quad (2-11)$$

ここで何か気がつきませんか? このふたつの式、共通部分が多いのです。すな

わち式(2-11)を書き換えれば、

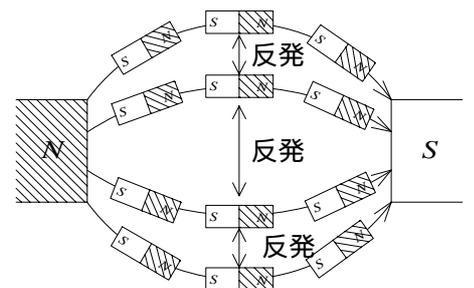
$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{r^2} = \frac{m}{4\pi r^2} \frac{1}{\mu_0} = B \times \frac{1}{\mu_0} \quad (2-12)$$

となります。これを磁束密度Bの式にすれば、

$$B = \mu_0 H \quad (2-13)$$

なる関係が得られます。最後に電界と磁界の比較を上げておきましょう。

磁界	{	磁力線 $N = m / \mu_0$ [本]
		磁束 $m[Wb] = m[Wb]$ 1Wbで一束
電界	{	電気力線 $N = Q / \epsilon_0$
		電束 $Q[C] D = Q[C]$ 1Cで一束



磁力線どうしが反発するので広がってしまうのです。

(c)

図2-5 磁力線の広がり

2-3 電流の作る磁界

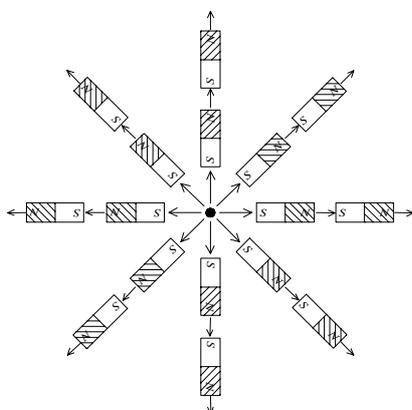
電気と磁気の間には大変深い関係があります。何故かという、電流あるところに必ず磁界が発生しているからなのです。そして電磁波というのはこの電気と磁気の相互作用が生み出したものなのです。電気と磁気……すなわち皆様有余りお好きでない電磁気学こそ電磁波を学にあたり大事な学問なのです。電磁気学は公式と面倒な公式だらけの世界で覚えてしまうと非常にわかりにくく敬遠できるものなら敬遠したい学問になってしまいます。ですが式ではなく形で理解すると実にどっぷりと漬かれる("はまる"とも言う)学問なのです。電波やら何やらの本質、原理がわかってくるのですからつまらないわけが無い。とりあえず皆様を電磁の世界へどっぷりと浸してあげましょう。

2-3-1 電流と磁界の関係

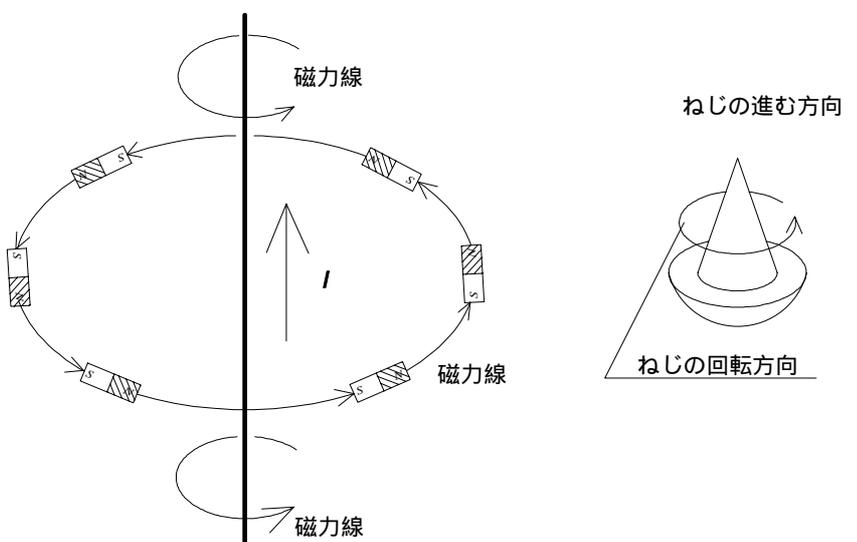
今まで磁界と言えば点磁極の作る図2-7(a)のような磁界を考えてきました。すなわち磁極 m より放射線状に磁力線が出ていくといったものです。ところが電流の作る磁界はこれとは少々違ってまいりまして、図2-7(b)のように導線の周りを磁力線がぐるぐる回るような磁界が出来上がります。この電流の向きと磁力線の向きの関係がかの有名なアンペア右ネジの法則と呼ばれるものなのです。導線に電流を流したときに発生する磁力線の向きを右ネジの回転方向に、ネジが進む方向を電流の向きに対応させたものです。

電流による磁界はこのように常に環を作ることが特徴で、電界の時や、磁極で作られる磁界のように沸きだしや吸い込みといったものはありません。式で言うなら

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0 \quad (2-14)$$



(a)点磁極の作る磁界



(b)電流の作る磁界

図2-7 点磁極と電流の作る磁界の違い

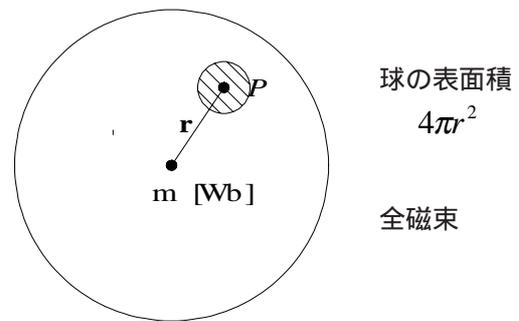


図2-6 球面より出て行く全磁束

という表現になります。

2-3-2 アンペア周回積分の法則

電流の大きさと電流によって作られる磁界の強さの関係はどうなっているのかを考えてみます。まず図2-8のように電流によってくられた磁界に、電流 I を囲むように任意の積分路 c_1 を考えてみれば

$$\oint_{c_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (2-15)$$

なる関係が得られます。また電流を囲まない積分路 c_2 をとると

$$\oint_{c_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2-16)$$

となります。これをアンペア周回積分の法則といいます。

結果を先に出してしまいましたが、この式について説明いたしますと、 c_1 という積分路の円周を細かく n 等分して、その各々の長さを l_1 から l_n とすると、磁界の強

さはそれぞれHですから、

$$Hl_1 + Hl_2 + Hl_3 + \dots + Hl_n = I \quad (2-17)$$

ということで、これを積分で表したものが式(2-15)です。式(2-16)は電流を囲まなければ 0 ということです。考えてみれば当たり前のことなのです。図2-11を用いて説明すれば と では打ち消しあって・・・といった (と では積分路の向きが逆であるのに注意) 具合です。ここでアンペア周回積分の法則を電流密度 J を用いてみますと、

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = J \quad (2-18)$$

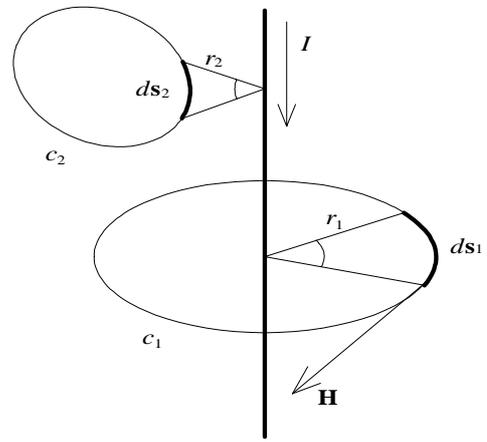
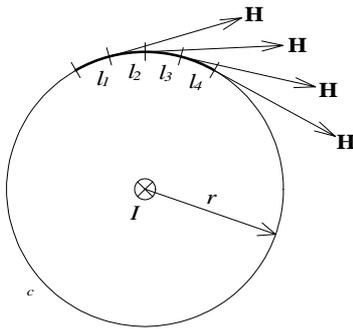
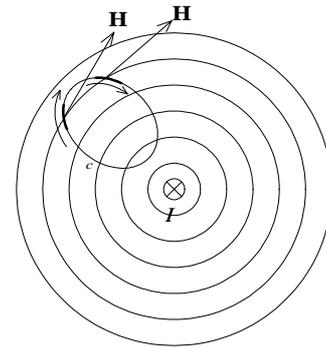


図2-8 アンペア周回積分の法則



(a) 電流を囲むよう積分路をとった場合



(b) 積分路が電流を囲まない場合

図2-9 アンペア周回積分の法則の考え方

これは透磁率が一樣であるときにいえます。また周回積分とベクトルの回転はこの場合、結果として同じとなりますので

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}) \quad (2-19)$$

となります。突然電流密度という言葉がでてまいりました。Jという字体からこれはベクトル量なんだということが想像つくでしょうか。さて、図2-11を見てください。鉄板に電極をくっつけ電流を流した図です。このとき電流の流れ方を表す流線というものを考え、この図のように電流が流れているものとして、今微小な面積dSを考え、その面積に流れる全電流がdIであり(電流はこの場合一方にまっすぐながれているわけではないので、電流ベクトルとしております)その方向が面積dSに垂直であるならばこの面積内の各点の電流密度は

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{dS} \quad (2-21)$$

となります。また電流Iをスカラー量として、その方向を面素ベクトルdSとして(見方を変えたわけ。わかります?)みれば

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2-22)$$

となります。

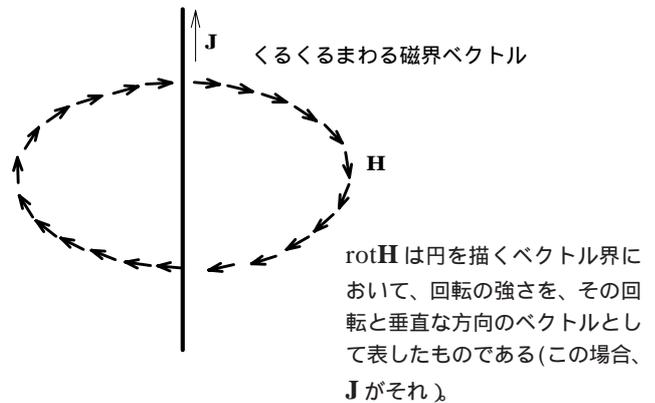


図2-10 rotH=Jとは

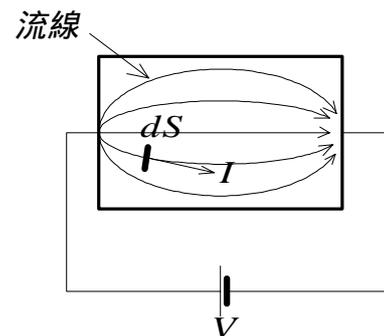


図2-11 電流密度

2-3-3 ビオサバールの法則

ビオサバールの法則という、一度電磁気学をやった人は「げげ！あれか・・・」なんて思われるでしょう。ビオサバールの法則を使うとなにができるのかといいますと、図2-12のようにくねくね曲がった導線に電流を流したとき、ある点Pにおける電流磁界を求めることができるのです。具体的には、導線を非常に細かく分けてdsの集合体としてしまい、各dsにより作られるその点の磁界を導線の長さだけ集めてやるのです。この時、微小な長さdsによって作られる電流磁界を表したものがビオサバールの法則なのです。このビオサバールの法則は、ベクトルによって式が表されているのですが、いきなりベクトルでやるとこんがらがります

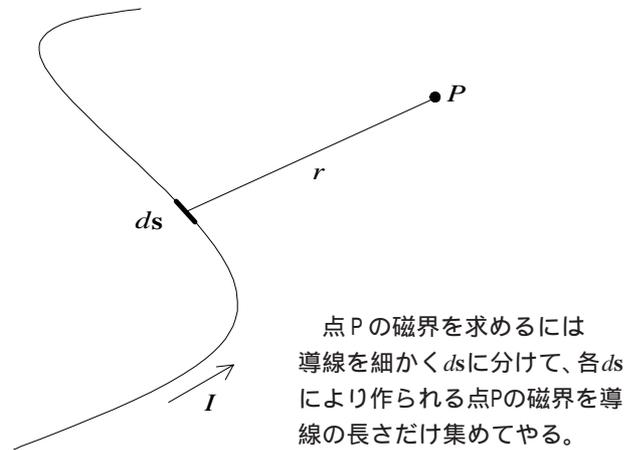
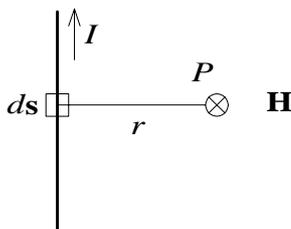


図2-12 ビオサバールの法則を使うと・・・

線素ベクトルdsと距離ベクトルrの外積をとったとき、その方向が磁界の方向になる。



微小線分は、 $ds \sin$ に補正される。

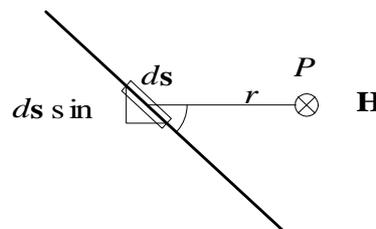


図2-13 ビオサバールの法則

すのでまず大きさのみから考えて、ビオサバールの法則とはどういったものであるのかを理解してみましょう。ビオサバールの法則において最も簡単な例を図2-13に上げます。この図において電流の流れている導線の線分dsによって作られる磁界の強さ Hは

$$\Delta H = \frac{I \times ds}{4\pi r^2} \quad (2-22)$$

となります。ここで Hとしたのは今現在P点の磁界の強さはdsのみを考えているわけで、実際は電流の流れている導線全部を考えに入れなければならないからです。さて、この図ではP点をdsと垂直の位置におきました。さて、導線が曲がっていたりとか、P点を導線と垂直な位置にとらなかつた場合は図2-13(b)を参考にすると、dsは $ds \sin$ として補正され、

$$\Delta H = \frac{I \times ds \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (2-23)$$

となります。これは線の向きがわかったときのHの大きさです。さてベクトルで表すとどうなるのでしょうか。式(2-22)から

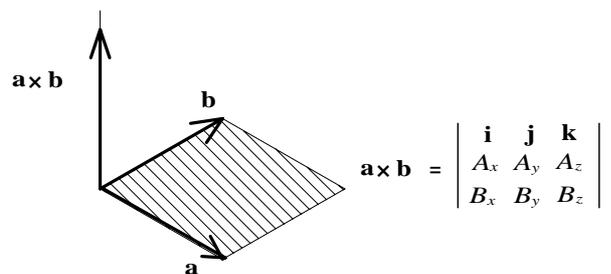
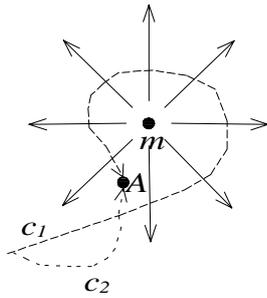


図2-14 ベクトルの外積

$$\Delta H = \frac{I ds}{4\pi r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{これは間違いです}$$

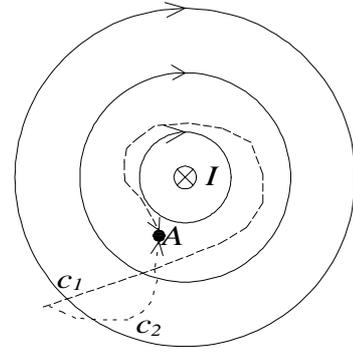
とやっではいけません。これは電流の向きと磁界の向きが今までと違っているからこの考え方が使えないのです。図2-13(a)において、線素ベクトルdsとP点の位置ベクトルr、そして電流の向きをよよく見ながら、式(2-23)をベクトル表示するときの $I ds \times \mathbf{r}$ のところに注目してください。I dsとrの積、そしてその結果であるHの向き、これは外積として表すことができるのです(覚えていますか？ 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の意味。図2-14

s



$$\int_{c_1} m' \cdot ds = \int_{c_2} m' \cdot ds$$

線積分は、積分路によらない。



$$\int_{c_1} m' \cdot ds \neq \int_{c_2} m' \cdot ds$$

線積分の値は、積分路の取り方により変わってくる。

図2-15 点磁界と電流磁界の違い

に載せておきますので参考にしてください)。したがって式(2-23)をベクトルで表すと、

この外積が磁界の方向としての意味を持つ

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{I ds \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (2-24)$$

となります。このビオサバールの法則からP点における磁界の強さを求めるには、磁界を作っている要素である ds を集める、すなわち積分を行います。

2-4 ベクトルポテンシャル

今まではいかにも磁界の話といった感じのもでしたが、突然題だけ見ると磁界と関係のないようなものになりました。御安心ください、このベクトルポテンシャルという言葉も磁界にとって大変重要なことです。さてポテンシャルという言葉が結構前にでてまいりましたが、覚えているでしょうか。忘れていたらもう一度読んでおいていただくとして、あのポテンシャル、すなわち電界における電位と同様に、磁界において磁位というものを考えることはできません。何故どうしてという前にまず考えてみましょう。磁界を作るにあたっては二通りの方法がありました。電荷と同じように磁極を用いた場合と、電流によって発生する場合です。前者の場合磁位を考えてもよいのですが、後者の場合が磁位を考えることができないのです。この磁位が考えられない理由を考えるには、grad のところで説明した高低を使うとわかりやすくなります。つまり矢印は高い方から低い方へ向かって延びていることを考えます。図2-15において(a)は m が一番磁位が高い、すなわち m を頂上とした山となっていることがわかると思います。では同図(b)はどうでしょうか？この図からはとても高低を想像することはできません。また微小な磁極 m' をそれぞれ c1、c2 という道のりで点 A に持って行ったとき(a)では

$$\int_{c_1} m' \cdot ds = \int_{c_2} m' \cdot ds \quad (2-25)$$

となるのですが、(b)では

$$\int_{c_1} m' \cdot ds \neq \int_{c_2} m' \cdot ds \quad (2-27)$$

となるのです。これでは点Aの位置エネルギーが何なのか定義することはとてもできません。これが電流により作られる磁界が磁位を持たない理由なのです。

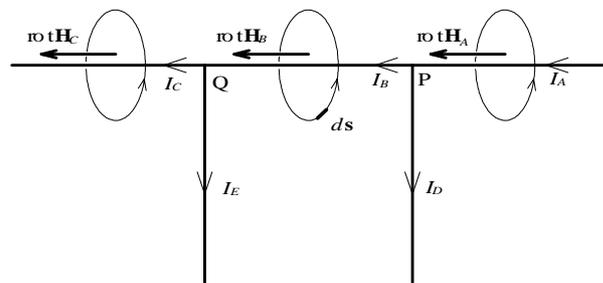
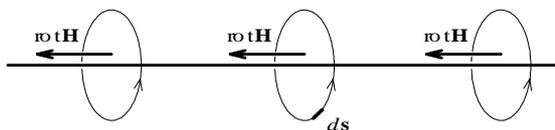
こうして磁位、すなわち電界と同じようにスカラーポテンシャル W を持つことができないことが明らかになりましたが、このような時、なんとかポテンシャルを定義することはできないのでしょうか。実はここで表題のベクトルポテンシャルというものが登場するのです。今まで電界の時にいっていたポテンシャルというのは大きさだけを表す、つまり正確に言えばスカラーポテンシャルというものでした。そして今回登場するのがベクトルポテンシャル。これはどういうものなのかを見ていきます。先にベクトルポテンシャルの定義をいってしましますと、

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (= \nabla \times \mathbf{A}) \quad (2-27)$$

すなわち、あるベクトル界 B が、他のベクトル界の回転で表されているとき、A を B のベクトルポテンシャルといえます。形としては座標変換とか写象とかに似ております。いままでは図2-11の(a)ように無限遠から m へ持って行く位置エネルギーでしたがベクトルポテンシャルは持って行く方向を図2-16(a)のように電流の流れる方向へ変えたものなのです。そして電流の大きさが変われば rot H の値が変わりますから、この変化を傾きとしてとってやれば、

$$\text{grad}(\text{rot} \mathbf{H}) \quad (2-28)$$

というものができます。これを図2-16(b)に示します。図において、I_A という電流は P 点にて分流され I_B になり、Q 点にてさらに分流され I_C となります。すなわち



dsを集めてその大きさがベクトルの大きさ。
ベクトルの向きは、kじよの回転面に垂直な向き。
つまり、このベクトルの大きさは、

$$\text{rot}\mathbf{H}$$

なので。

図2-16 ベクトルポテンシャルの考え方

$$I_A > I_B > I_C \implies \text{rot}\mathbf{H}_A > \text{rot}\mathbf{H}_B > \text{rot}\mathbf{H}_C$$

電流の大きさが変われば rotH の大きさも変わる。
rotH を使うと、勾配を見ることができる。

ポテンシャルとして使える！

$$I_A > I_B > I_C \quad (2-29)$$

となります。そしてそれぞれの電流によって作られる磁界を考え $\mathbf{H}_A \sim \mathbf{H}_C$ とします。これをそれぞれ rot をとれば、

$$\text{rot}\mathbf{H}_A > \text{rot}\mathbf{H}_B > \text{rot}\mathbf{H}_C \quad (2-30)$$

というようになるのはわかるでしょうか。電流が少なければ電流の周りにできる磁界は小さいのですから、rotをとればその大きさは小さくなります。つまりこの場合、式(2-28)は導線の周りにできる磁界の強さの勾配を電流が流れる方向にとっているものを表しているのです。すなわち rotH、これがベクトルポテンシャルなのです。

では、このベクトルポテンシャルの磁界への応用を考えてみましょう。電界のところではポアソンの方程式というものがありませんでした。電位分布がわかれば微分をして電界分布がわかり、もう一回微分をすれば電荷の空間分布がわかるというあれですね。磁界においてもベクトルの回転を使ったとはいえポテンシャル(ベクトルポテンシャル)というものができましたので、静電界と同じようにポアソンの法則ができそうです。いま、媒質の透磁率が一樣であるとすれば、 $\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}$ であることは既に述べました。この式の両辺に μ をかけて、 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ から

$$\begin{aligned} \mu \text{rot}\mathbf{H} &= \mu \mathbf{J} \\ \therefore \text{rot}\mathbf{H} &= \mu \mathbf{J} \end{aligned} \quad (2-31)$$

また、磁界のベクトルポテンシャルを \mathbf{A} とすれば、 $\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}$ ですから、ベクトル公式を使って、

$$\text{rot}\mathbf{H} = \text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2-32)$$

ここで、図2-17のような電流が作る磁界を考えれば、微小体積に入ってくるベクトルとでていくベクトルは等しい、つまりベクトルの発散はありませんから、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2-33)$$

よって、式(2-31)と式(2-32)から

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (2-34)$$

となります。ゆえに

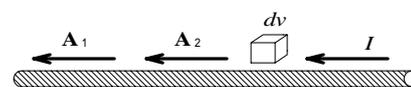
$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (2-35)$$

という式が得られました。これをベクトルポアソンの方程式といえます。この式からベクトルポテンシャルがわかれば、それを2回微分すると電流分布がわかるようになります。また逆に、透磁率が一樣な媒体において電流分布がわかればベクトルポテンシャル \mathbf{A} がわかるともいえます。式(2-35)から見るに、積分を行えば、微分がとれて \mathbf{A} が求められるであろうことが推測できます。では実際に求めてみることにしましょう。直交座標系においてベクトルポアソンの方程式を各座標成分に分けると、

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{A})_x &= \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_y &= \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_z &= \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \end{aligned} \quad (2-36)$$

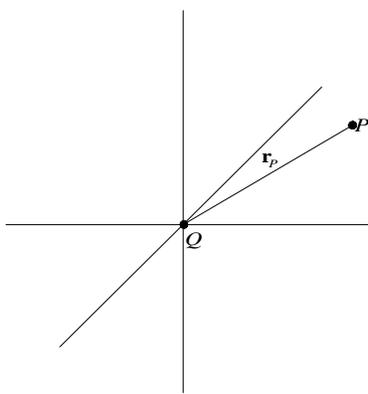
となります。電荷分布からスカラーポテンシャルを求めるときに図2-18(a)を用いたように、電流密度 $\mathbf{J}(r)$ が領域 v にあるとき、P点におけるベクトルポテンシャルの各成分は同じように $(-\mu \mathbf{J})$ が図2-18(a)の $1/|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}|$ に対応していることに注意、

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_x}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}|} dv$$



$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

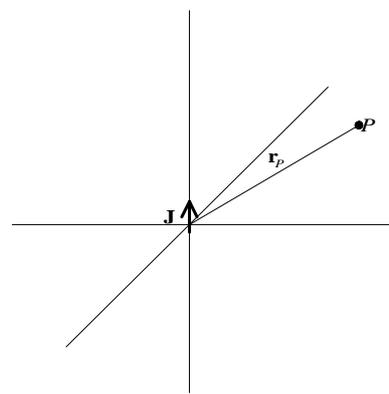
図2-17 ベクトルの発散はない



電荷Qが一個空間にあったとき、Qと電位(スカラーポテンシャル)の関係は

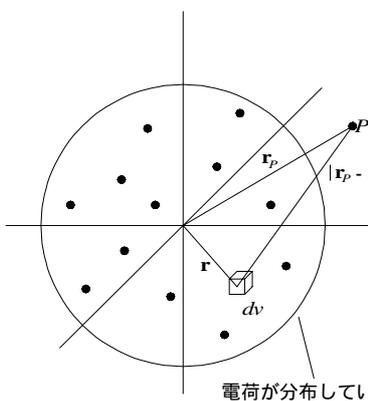
$$\nabla^2 V = -\frac{Q}{\epsilon}$$

よは、Qがわかれば、この、単純な式から電位分布がわかるということ。



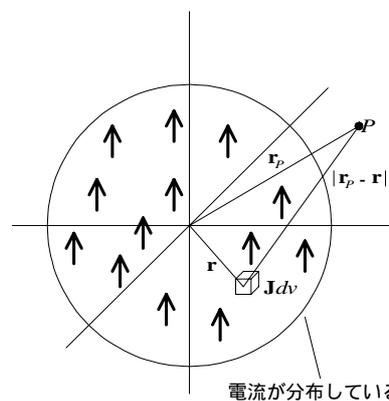
電荷に対し、スカラーポテンシャルVが存在するように、電流JにベクトルポテンシャルAが定義できる。電流Jが一個空間にあったとき、JとA(ベクトルポテンシャル)の関係は

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$



電荷Qが一個でなく、空間に分布しているときも、ポアソンの式で求められる。電荷が分布している領域の微小体積dvをとり、その微小体積による電位を、全体積分集めれば、電荷が空間に分布している場合の電位分布が計算できる。

電荷が分布している領域



電流Jが一個でなく、空間に分布しているときも、電荷とスカラーポテンシャルVと同じ手法で、ベクトルポテンシャル分布を求めることができる。

電流が分布している領域

(a) 電荷の空間分布とポテンシャル

(b) 電流の空間分布とベクトルポテンシャル

図2-18 ポアソンの方程式を使って、空間に分布している電荷・電流からポテンシャルを求める

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_y}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} dv \quad (2-37)$$

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_z}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} dv$$

となり、まとめて表せば

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} dv \quad (2-38)$$

となります。いま、図2-18(b)の領域内の電流密度Jを有限長直線導線に流れる電流Iとすれば、図2-19のように書き直されます。このときP点のベクトルポテンシャルはどのようななるかといいますと、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{I ds}{r} dv \quad (2-39)$$

となります。どうしてこうなるのかといいますと、まず磁界を作っている導線のうち、断面積がSで、長さがdsの線上電流Iによって生ずるベクトルポテンシャルは、

$$J dv = \mathbf{J} \Delta S ds = I ds \quad (2-40)$$

となり、また点Pまでの距離はrとわかっていますから、

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds}{r} \quad (2-41)$$

ゆえに、dsを棒の長さだけ集めて式(2-38)のようになります。

2-5 電磁誘導に関する法則を少々

2-5-1 ファラデー、レンツの法則

電流と磁界の関係を考えるときに重要なもうひとつの基本事項として電磁誘導作用があります。これは今まで述べた電流からを発生させるのと、ちょうど逆で、磁界から電流を発生する現象なのです。それでは図2-20のように磁界の中に導線をおいてみたらどうなるでしょうか。電流で磁界が作れるのですから、磁界の中に導線をおけば電流が流れるのじゃないかなというわけです。ところが、このままでは電流は流れてくれません。電流が流れるのは導線に交わる磁界の強さが変わった場合にだけ電流が流れるのです。電流が流れるということは、導線に起電力が生じるということです。これが電磁誘導において最も重要なことなのです。さて、この時発生する起電力の大きさと方向は二つの法則により成り立ちます。大きさについてはファラデーの法則、そして方向についてはレンツの法則によって述べられています。それぞれの法則を次に上げておきましょう。

ファラデーの法則

電磁誘導により発生する起電力の大きさは磁束数の変化する割合、 $d\Phi/dt$ に比例する。

レンツの法則

電磁誘導によって発生する起電力の向きは磁束変化を妨げる電流を生ずる向きに発生する。

ちょっとレンツの法則がわかりにくいかもしれませんので図で説明を補足いたしましょう。

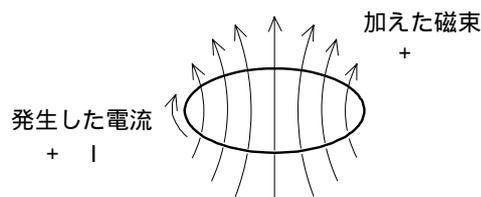
図2-21(a)のように磁力線を増加させたとき、これを妨げる方向に電流が流れます。妨げるということは(a)の磁力線の向きと反対方向の磁力線が発生するように電流が流れるわけです。電流の流れる方向と磁力線の向きは(b)に示すようにアンペア右ネジの法則にしたがっています。

さて、もうひとつノイマンの法則というものもあるのですが、これはファラデーの法則とレンツの法則をまとめたようなものですので、特に改めて紹介はいたしません。

2-5-2 フレミングの法則

導線に電流を流すと磁界が発生することはすでに述べました。それではすでにその導線が磁界の中にあつたらどうなるのでしょうか。このとき電流により作られる磁界と他の磁界とが影響しあい、力を発生します。これを電磁力といい、導線に流した電流の向き、そして発生した力の向き、外部から与えた磁界の向きをそれぞれ中指、親指、人差し指で表したものがフレミング左手の法則といいます。また磁界中に導線をおきその導線を動かして、導体と磁束が切り合うと導線に起電力が発生し電流が流れます。この発生する電流の向きと、磁界の向き、そして導線を動かした方向をそれぞれ中指、人差し指、親指で表したものをフレミング右手の法則といいます。これを図2-22に示します。

2-6 自己誘導と相互誘導



磁界は、この棒に流れる電流でのみ作られるものとして扱います。

図2-18(b)の領域 v がこの電流の流れている棒の体積に相当する。

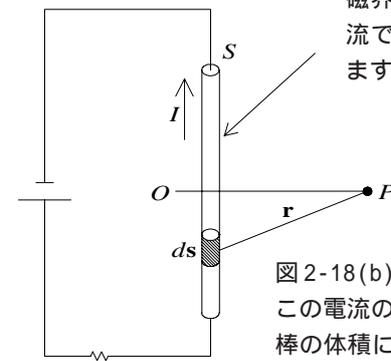


図2-19 棒に流れる電流で作られるベクトルポテンシャル

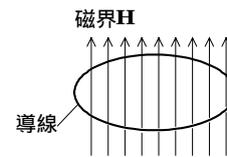


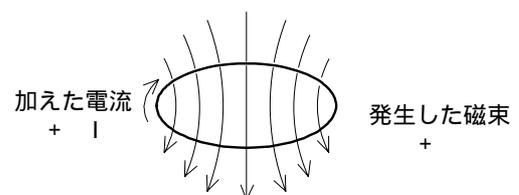
図2-20 磁界の中に導線をおく

2-6-1 誘導作用について

導線に電流を流せば磁界ができ、また磁界の中にある導線が動くか、磁界の強さが変わるかして鎖交磁束数(鎖交というのは一般に磁束がコイルを貫いて鎖のように交わることを言います。詳しくは図2-23を見てください)が変わったとき導線に電流が流れます。さて、図2-24(a)のようにコイルに流す電流を変化させた場合、発生する磁束も変化します。ということは、コイルに鎖交する磁束数が変化するという事、このコイル自身に誘導起電力が発生することにお気づきでしょうか。

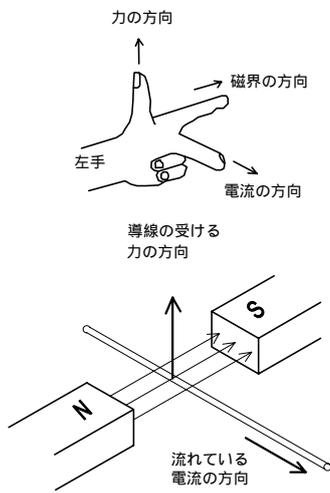
自分自身が磁束を変化させた結果、自分自身に起電力を発生する。これを自己誘導といいます。誘導される起電力の方向は、電流変化を保証する方向に発生します。つまりコイルが発生する磁束が減れば(コイルに流す電流を減らす)、

磁力線を変化させると、それを妨げるような電流が生じる。磁力線の向きから発生する磁力線の方向が、外部から与えられる磁力線の方向と逆であることに注目。

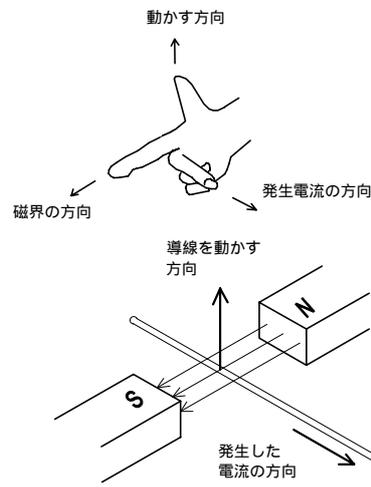


(a)の方向に電流を加えると、このような方向に磁束が発生する。これは、アンペア右ネジの法則に従います。

図2-21 レンツの法則



(a)フレミング左手の法則



(b)フレミング右手の法則

右起電
(ミギキデン)
左起機
(ヒダリキキ)
と覚えましょう。

図2-22 フレミングの法則

それを増やす方向に起電力が発生し、磁束が増えれば(コイルに流す電流を増やす)これと反対方向の起電力をコイルが誘起します。一言で言えば、コイルは変化させる前の状態を保とうとするのです。ここで図2-24(a)の回路に新たなコイル c_2 を近づけてみます。そして L_1 に流す電流を変化させますと、 L_2 に鎖交する磁束が変化し、 L_2 に起電力が発生します。これを相互誘導といい L_2 に発生する起電力の方向はレンツの法則にしたがいます。

2-6-2 誘導作用とインダクタンス

誘導作用には自己と相互がありますが、いずれにせよ磁束が変化すれば誘導起電力が発生することは確かです。ここではどの程度の磁束変化がどの程度の誘導起電力を発生させるかを考えます。まず自己誘導から見ましょう。

図2-25のように巻き数 N のコイルに流れる電流を t 秒間に I [A]変化させたとき、このコイルと鎖交する磁束が $\Delta\phi$ [Wb]変化すると、コイル自身が発生する自己誘導起電力 e は

$$e = -N \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \text{ [V]} \quad (2-42)$$

となります。今磁気抵抗が一定ならば、磁束変化率

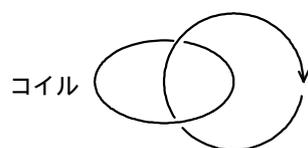
I / t は、電流の変化率 I / t に比例しますので、比例定数を L としますと

$$e = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{ [V]} \quad (2-43)$$

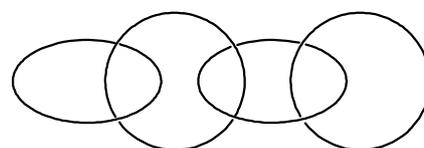
という式が出来上がります。つまり電流変化に L という比例定数をかけたものが誘導起電力(ただしかけた電流に対し電圧はそれに反発する方向にでてくる。負号はこの為)となります。この比例定数 L を自己インダクタンスといい、単位は[H:ヘンリー]であらわします。またこの値は、コイルの形状、巻き数などで決まってきます。とりあえずこの式から、1[sec]に1[A]の電流変化を与え、1[V]の自己誘導起電力が発生すればそのコイルは1[H]であるといえます。さて、自己誘導にせよ相互誘導にせよ、原理としては磁束が変化して起電力が発生するというものですので、図2-26に示すようにコイル L_1 により発生する磁束変化と、コイル L_2 に誘導される起電力は比例関係を持ちます。つまり、 L_1 により磁束が発生し、そのうち m だけが L_2 と鎖交したとして、

$$e = -N_2 \frac{\Delta\phi_m}{\Delta t} \text{ [V]} \quad (2-44)$$

という式が成り立ちます。また自己誘導と同様に m



(a)コイルと発生する磁束



(b)磁束

図2-23 鎖交とは

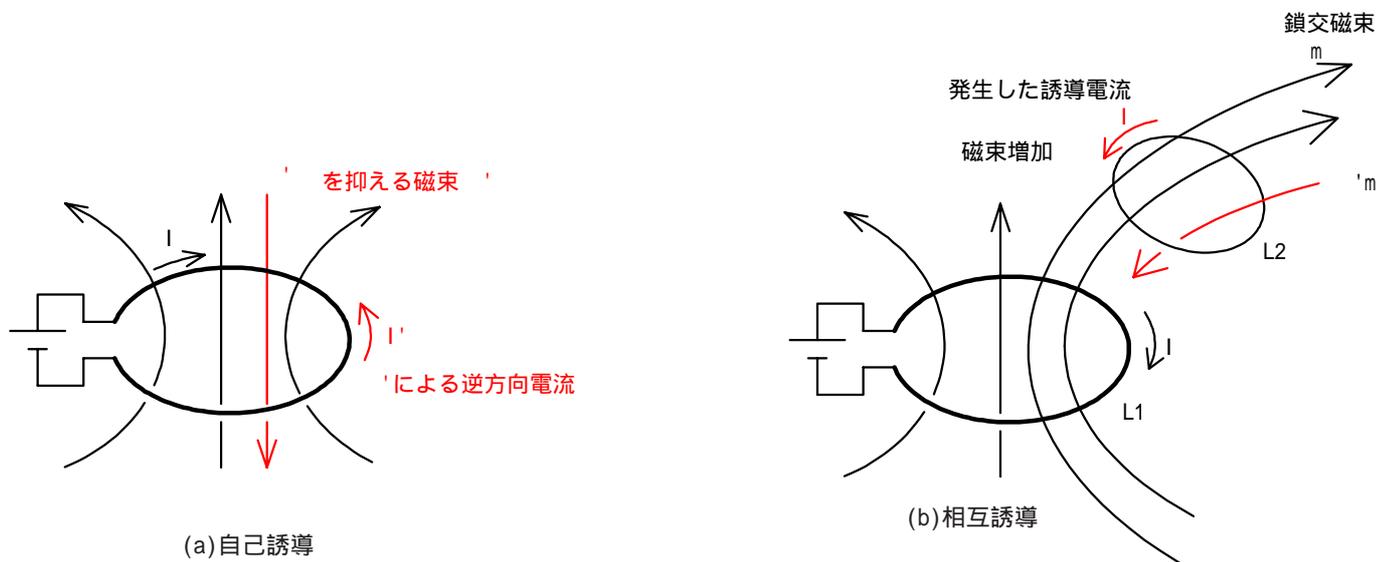
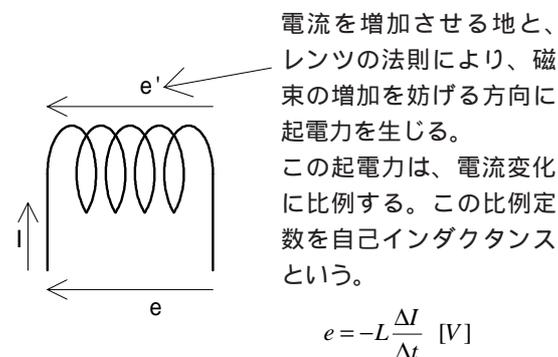


図 2-24 誘導作用

$\frac{e}{\Delta I}$ と $\frac{1}{\Delta t}$ の比例定数を M と定めると

$$e = -M \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad [V] \quad (2-45)$$

となります。この M を相互インダクタンスといい、自己インダクタンスと単位は同じ $[H]$ です。自己誘導と同じようにコイル L_1 に $1[sec]$ あたり $1[A]$ の電流変化を与えると、 L_2 に $1[V]$ の電圧が発生したとき、相互インダクタンスは $1[H]$ であるといえます。



電流を増加させる地と、レンツの法則により、磁束の増加を妨げる方向に起電力を生じる。この起電力は、電流変化に比例する。この比例定数を自己インダクタンスという。

$$e = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad [V]$$

図 2-22 自己インダクタンス

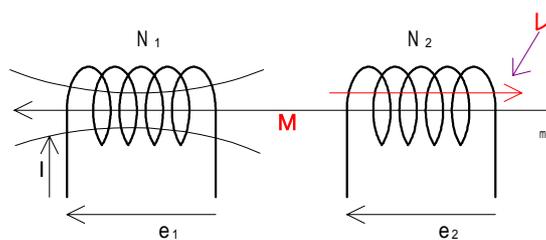
2-7 磁界に蓄えられるエネルギー

静電界のところで、電界の強さが E 、電束密度 D の領域には単位体積あたり $(1/2)E \cdot D$ の静電エネルギーが蓄えられていることを述べました。磁界の場合もこれと同じで、磁界の強さ H 、磁束密度 B の領域には単位体積あたり $(1/2)H \cdot B$ なるエネルギーが保有されます。このことを図 2-20 を用いて説明いたしましょう。

まず、スイッチを入れてソレノイドに電流を流したとします。すると、ソレノイド内に磁束 Φ が発生します。ここでスイッチを切ると電流が流れなくなりますが、ソレノイド内に発生した磁束はぐるぐるとソレノイドの中を回り続けます。もし漏れ磁束や磁気抵抗が

無ければこの磁束はこのままソレノイド内を減衰すること無く回り続けます。これが磁界による保有エネルギーと考えて良いでしょう。

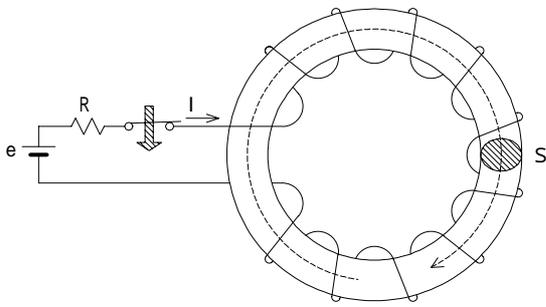
ここで(c)のように負荷をつなげばレンツの法則により電流が流れエネルギーを取りだしたことになります。このソレノイドに蓄えられるエネルギーの量はもう $(1/2)H \cdot B$ だといってしまいましたが、導き方は示していませんので、図 2-27 の回路を用いて本当に $(1/2)H \cdot B$ なのかを確かめてみましょう。計算としては、 $t = 0$ でスイッチを入れて時刻 T 秒においてソレノイド内部に蓄えられている磁気エネルギーを求めます。ソ



N_1 で発生した磁束のうち、 Φ_m が N_2 を通るため、この Φ_m のせいで、 N_2 に起電力が生じる。この起電力は、 N_1 に流す電流の時間変化に比例する。このときの比例定数を相互インダクタンスという。

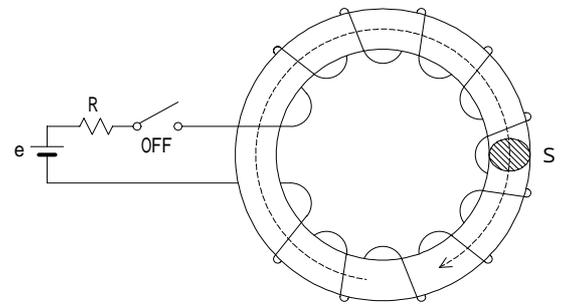
$$e = -M \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad [V]$$

図 2-23 相互インダクタンス

平均磁路の長さ l

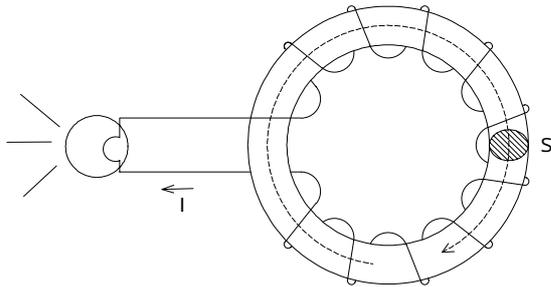
スイッチをONにすると、ソレノイドに電流が流れ、磁束が発生する。

(a) エネルギー充電

平均磁路の長さ l

スイッチはOFFにしても磁束はソレノイド内をぐるぐる回り続ける。磁気抵抗や漏れ磁束がないのなら、この磁束は減ることなく延々と回り続ける。これがソレノイドに磁束という形でエネルギーが蓄えられている状態。

(b) エネルギー保持状態

平均磁路の長さ l

ソレノイドに蓄えられていた磁束から、レンツの法則により電流が取り出せる。

(c) エネルギーの放出

ソレノイドは、磁束という形で、電気エネルギーを充電・放電できる。いわば、電池のような動作ができる。ただ、現実のソレノイドは、磁気抵抗や漏れ磁束が多いため、長くエネルギーを保持できない。

図2-27 ソレノイドに蓄えられるエネルギー

ソレノイドの形状は、断面積 $S[m^2]$ 平均磁路の長さ $l[m]$ とし、そこへ巻き数 N のコイルが巻かれているものとしてします。

すると、起電力 e と磁束との関係は

$$e = Ri + N \frac{d\phi}{dt} \quad \left(e_L = N \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (2-46)$$

という式が成り立ちます。ここで i は時刻 t 秒における電流、 ϕ はその時のソレノイド内部の全磁束です。さて、時刻 t から $t + dt$ までの間に電源がこのソレノイドに供給したエネルギーは

$$ei = Ri^2 + N \frac{d\phi}{dt} i, \quad \phi = BS \quad (2-47)$$

より、

$$eidt = Ri^2 dt + iNSdB \quad (2-48)$$

という式が得られます。求めたいのはこの式の右辺の第二項、磁気エネルギーの増加分です。ここでこの第二項を

$$d\omega = iNSdB = lSHdB \quad (2-49)$$

としましょう。ところでソレノイド内の磁界が平等であり、大きさが H だとすれば

$$Hl = Ni \quad (2-50)$$

$$N = \frac{Hl}{i} \quad (2-51)$$

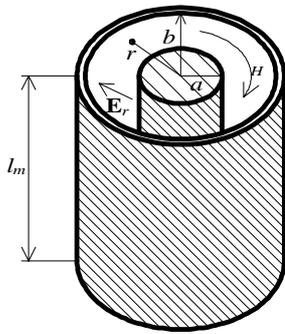
という式が出ますから、この式を磁気エネルギーの増加分である $d\omega$ に代入すれば、

$$d\omega = iNSdB = lSHdB \quad (2-52)$$

となります。ソレノイドの単位体積あたりに $t = 0$ から $t = T$ までの間に蓄えられる磁界エネルギーは式(2-48)をソレノイド内に保有されるエネルギーの式に変形した

$$iNSdB = (ei - Ri^2)dt \quad (2-53)$$

より



この形は、いわゆる同軸ケーブル。この形の自己インダクタンス、また第一章で求めた、この形の静電容量から、後で述べる、特性インピーダンスが計算できる。

図2-28 同心円状導体の自己インダクタンス

$$\omega = \frac{1}{lS} \int_0^r (ei - Ri^2) dt = \frac{1}{lS} iNS dB = \int_0^r \frac{iN}{l} dB$$

式(2-50) より $\frac{iN}{l} = H$ だから

$$= \int_0^r H dB = \int_0^r \frac{B}{\mu} dB = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad [J/m^3]$$

(2-54)

となります。結局スイッチを入れた後、T秒経過したときにソレノイド内に蓄えられるエネルギーは、T秒となったときのH、Bの積の半分ということになります。

さて、ここではソレノイド内ということで計算しましたが、この式は特にソレノイド内でもなくとも磁界があればそこに保有される単位体積あたりのエネルギーは $(1/2)\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ として表せます。磁界の存在する領域全体に蓄えられる磁界の全エネルギーWは単位体積あたりのエネルギーを全体積分集めればいいので

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (2-55)$$

となります。

2-8 自己インダクタンスの計算例

ここでは実際に自己インダクタンスを求めてみましょう。求めるものとしては、同心円筒状導線と無限長平行往復導線の二つについてです。これらについては、伝送線路のところ再びお目にかかるものです。

2-8-1 同心円筒状の単位長当たりの自己インダクタンス

図2-28のように内部導体半径a、外部導体半径bの同心円筒状に配置された導体のうち、内部導体に電流Iを流した時の単位長当たりの自己インダクタンスを求めてみましょう。発生する磁束は、外部導体と内部導体の間に閉じ込められているということがポイントです。

いま、内部導体に電流Iが流れていますので、この2導体間の磁界は

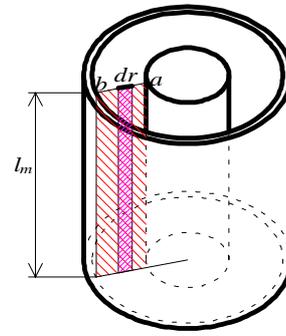


図2-29 aからbまでの積分

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (2-56)$$

となりますから、単位長当たりの磁束を ϕ とすれば、

$$\begin{aligned} \phi &= BS = \mu_0 HS = \mu_0 \int_a^b H dr \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \log_e \frac{b}{a} = LI \end{aligned} \quad (2-57)$$

したがって自己インダクタンスは

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \log_e \frac{b}{a} \quad (2-58)$$

となります。

2-8-2 無限長平行往復導線の単位長当たりの自己インダクタンス

図2-30のように、半径aの無限長導線を平行に間隔dで配置し、導線abにそれぞれ反対向きに電流を流した時の自己インダクタンスを求めてみます。ただ、ここでは $a \ll d$ とします。

図2-31において、P点における磁界の強さは、導線Aと導線Bにより作られる磁界の和ですから、

$$H = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(d-x)} = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \quad (2-59)$$

となります。したがって、図2-31におけるP点から幅dx、単位長の微小面積dSに鎖交する磁束d ϕ は、

$$d\phi = BdS = \mu_0 H dx \quad (2-60)$$

ですから式(2-59)を代入して

$$d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx \quad (2-61)$$

したがって、AB両導体間の単位長当たりの鎖交磁束数は、

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} [\log_e x - \log_e (d-x)]_a^{d-a} \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi} \log_e \frac{d-a}{a}$$

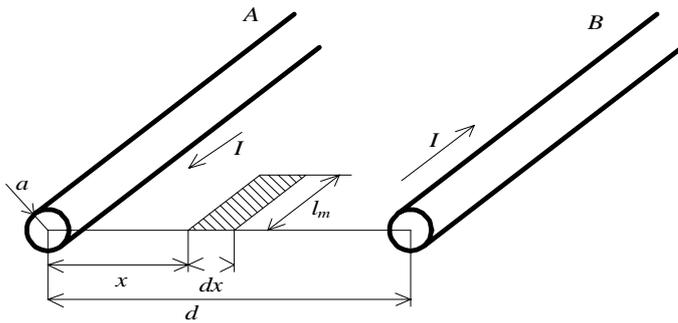
したがって、 $L = LI$ より

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \log_e \frac{d-a}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (2-63)$$

となります。また、 $a = d$ ならば

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \log_e \frac{d}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (2-64)$$

となります。



いわゆる平行フィーダーの特性インピーダンスの算出に、第一章の静電容量と併せて必要になる。

図2-30 無限長平行往復導線の自己インダクタンス

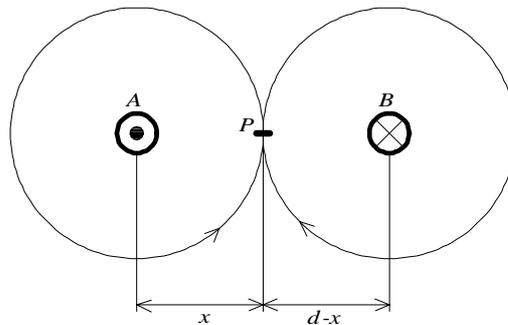


図 2-31 積分区間