第一章

静電界

ひょいと電荷を置いたとき、その電荷に力が働けば、そこは電界という世界の中です。ようは、電荷が力を受けるような世界を電界と呼んでいます。質量という量があれば、引力を受ける、その世界を重力圏というのと同じです。

なにも無い世界に、電荷を一個おけば、その周囲は電界という世界になり、もうひとつ電荷を持ってくれば吸引・反発のどちらかの力が発生します。どれだけの力が発生するのか、その量を式で表したのがクーロンの法則です。

この章では、まずクーロンの法則から入っていき、そして、ベクトルの数式表現の仕方、さらに電界というのはひとつのエネルギーであるというところへ話をもっていきます。

(a) 同極性電荷　　(b) 異極性電荷

図 1-1 電荷の吸引・反発

1-1　クーロンの法則

正でも負でもどちらでもいいんですけど、帯電したものどうしの間には力が働きます。このおのおのの帯電体の極性が同じなら反発力、違うなら吸引力となります。そして、この帯電体に働く力の大きさを式で表しますと、

$$F \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \qquad (1-1)$$

というようになりまして、これをクーロンの法則といいます。すなわち電荷 Q が大きければ、帯電体間に働く力は大きいし、帯電体どうしの距離 r 遠くなれば互いに働く力は弱くなるということです。いま、式(1-1)を "＝" で結ぼうとすると

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \qquad (1-2)$$

というように、比例乗数 k が入っていきます。k の値は

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (1-3)$$

ε_0:誘電率　8.854 × 10^{-12} [F / m]

です。こうして真空中におかれた二つの電荷 Q_1・Q_2 の間に働くクーロン力の大きさは、

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad [N] \qquad (1-4)$$

という一つの公式になるんだと思っておいてください。

さて、この式はクーロン力の大きさを表すものです。実はこれから最終目標である電磁波へ話を進めるためには、大きさだけを表す式ではとても太刀打ちできません。大きさのほかに、その力の働く方向というのを考えなければならないのです。大きさと方向・・・すなわち "ベクトル" です。式をベクトル表示すれば、その力の働く大きさと方向を表すことができるのです。しかし、中にはベクトルというと、「えぇ！！代数学！こいつぁ難しい」とか「何だかよくわからないけど拒否反応がでる」という人もいるでしょう。ベクトルという言葉はちょっと前は難しい言葉としてポピュラーなもの(？)らしかったような気がします。ほかにエントロピーとかエンタルピーなんてのも難しい言葉としてブラックリストに載っていたような・・・。余談はさておきベクトル表示は決して難しいものではありません。ようは大きさと方向の積なのですから。この方向についてこそがベクトルについて戸惑う原因ですので、このあたりから攻めてみましょう。

一般に方向は 3次元で表すのですが、どうも 3次元となると 「よく分からん」 という人が急増しまして、" 式が複雑になる " とか " 図が書きにくい " といった理由が原因となっているためのようです。確かに 2次元である紙の上に 3次元の絵を書くのは結構大変です。とはいえこの本を飛び出す絵本のようにするわけにもいきませんし・・・。ですが恐れることはありません。3次元といったって、ようは図の書きやすい 2次元にもう 1次元増えただけ、すなわち 2次元さえしっかりと理解すれば 3次元へは以外と楽に飛躍できるのです。図が書きにくいといっても頭のなかが整理できていれば書きにくいのも書きやすくなります。そんなわけで、まず 2次元におけるクーロンの法則のベクトル表示について考えていきましょう。いま**図 1-2** に示されるように、電荷 Q_1,Q_2 をおいた場合、それぞれに働く力をベクトル $\boldsymbol{F}$ で表すと式は

$$\mathbf{F} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}} \times \boxed{\frac{r_1 - r_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}} \qquad (1-5)$$

ﾍﾞｸﾄﾙの大きさ　ﾍﾞｸﾄﾙの方向

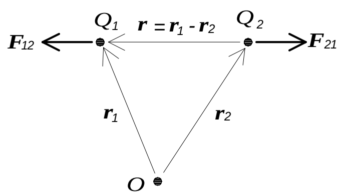


図 1-2 原点を Q_1,Q_2 とは別の場所にとってみる

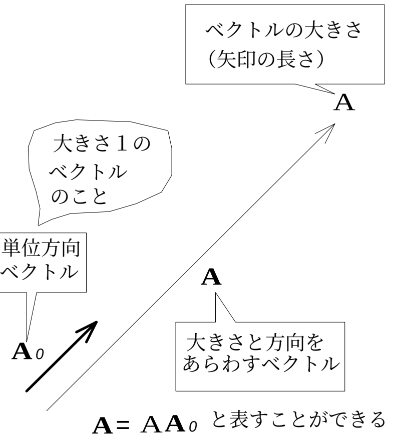


図1-3 ベクトルの表しかた

となります。数式でベクトルを表すときは、これはベクトルを表しているんだよ、ということで、太字を用います。ベクトルの大きさについては式(1-4)に示したものと同じですが、新たに式(1-5)ではベクトルの方向というものが入ってまいりました。まずはこの方向というものを説明いたしましょう。**図1-3**を見てください。この図におけるベクトル $\mathbf{A}$ は $\mathbf{A}$ の大きさ A と、$\mathbf{A}$ の方向を表す単位方向ベクトル $\mathbf{A_0}$ を用いて

$$\mathbf{A} = A\mathbf{A}_0 \qquad (1-6)$$

となります。ここで $\mathbf{A_0}$ がどうやって方向を表すのかというと

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y \qquad \sqrt{x^2+y^2} = 1 \qquad (1-7)$$

というように、x 方向にどれだけか、y 方向にどれだけかという形で表されます。例を上げてみますと、図1-4に示される三つの方向単位ベクトルは、

① $\mathbf{A}_0 = \mathbf{i}1$

② $\mathbf{A}_0 = \mathbf{i}\sqrt{2} \ + \ \mathbf{j}\sqrt{2}$

③ $\mathbf{A}_0 = \qquad \mathbf{j}1$

のように表されます。以上を踏まえて話を式(1-5)に戻すとしましょう。いま、式(1-5)において、ベクトルの大きさAとベクトル $\mathbf{A}$ が分かっていれば、方向単位ベクトル $\mathbf{A_0}$ は

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mathbf{A}}{A} \qquad (1-8)$$

となります。ここで図1-5を見ますと、ベクトル $\boldsymbol{F}_{12}$ の方向ベクトルは式(1-8)と照らし合わせて、

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$A = \left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right|$$

から

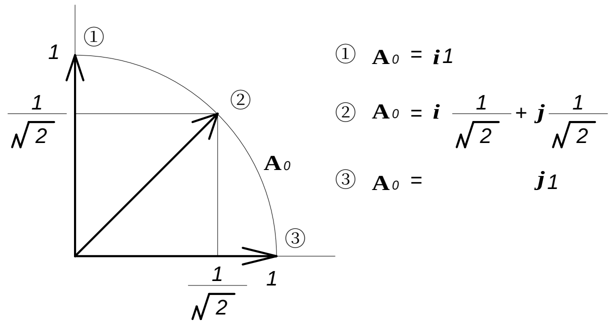


図1-4 単位方向ベクトル

$$\mathbf{r}_{120} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right|} \qquad (1-9)$$

という方向ベクトルができます。こうして、式(1-5)のような力のベクトル表示が生まれるのです。同様に $\mathbf{F}_{21}$ を求めますと

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\times\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|} \qquad (1-10)$$

となります。

ではこれら式についてちょっと例を上げてみることにします。図1-6に示されるように、2次元空間に $Q_1(1,4)$、Q2(3,2)が配置されたとき Q_1 に働く力　$\mathbf{F}_{21}$ を求めてみましょう。

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}1 \ + \ \mathbf{j}4$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}3 \ + \ \mathbf{j}2$$

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (\mathbf{i}\,x_1 + \mathbf{j}\,y_1) - (\mathbf{i}\,x_2 + \mathbf{j}\,y_2)$$

$$= (\mathbf{i}1 + \mathbf{j}4) - (\mathbf{i}3 + \mathbf{j}2) = -\mathbf{i}2 + \mathbf{j}2$$

$$r = \left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 22$$

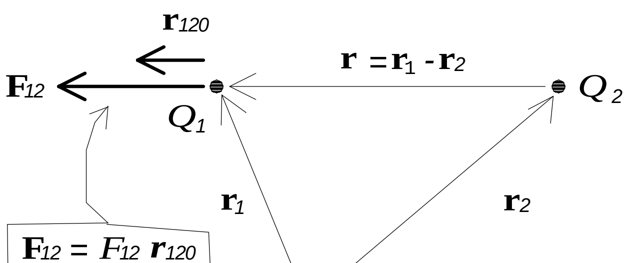


図1-5 $\mathbf{F}_{12}$ の表しかた

したがって、

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\times\frac{r_2 - r_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{8}\times\frac{-\mathbf{i}2 + \mathbf{j}2}{8}$$

$$= -\mathbf{i}794 + \mathbf{j}794 \qquad [uN]$$

と表されます。x 軸方向に -794〔μN〕,y 軸方向に 794〔μN〕の力が働くということです。このようにベクトルで表示することにより、各成分で表すことができます。3 次元となっても全く同じで、各ベクトル成分が x、y、z の 3 成分となっただけなのです。例を上げてみましょう。図 1-7 において F_{12} を求めます。さすが 3 次元となると図がごっちゃりしてきますが、座標さえしっかり押さえておけば大丈夫です。

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (\mathbf{i}x_1 - \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1) - (\mathbf{i}x_2 - \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2)$$

$$= (\mathbf{i}2 - \mathbf{j}2 + \mathbf{k}1) - (-\mathbf{i}3 + \mathbf{j}4 + \mathbf{k}5) = \mathbf{i}5 - \mathbf{j}2 - \mathbf{k}4$$

$$r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6.71$$

よって

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\times\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1u)^2}{(6.71)^2}\times\frac{\mathbf{i}5 - \mathbf{j}2 - \mathbf{k}4}{6.71}$$

$$= \mathbf{i}149 - \mathbf{j}59.5 - \mathbf{k}199 \qquad [uN]$$

と 3成分の大きさで表すことができます。

さて、今までは 2 つの電荷がおかれた状態について考えてきました。ここでちょっと考え方を変えてみます。まず電荷 Q_1が一個空間に存在するとしましょう。そして、その空間内にもう一個 Q_2 をおくとクーロン力が発生するのは前に述べたとうりです。このように電荷に力が働く空間を電界と呼んでおります。この場合、Q_1 により作られる電界に Q_2 を持ってきたので、クーロン力が働いたということになります。電界の強さの定義は、"Q_2 の強さをその Q_2 の存在する電界に影響が無いよう極めて小さく変化させたとき、どの程度働く力が変化するか" と表されます。式で表現すると、

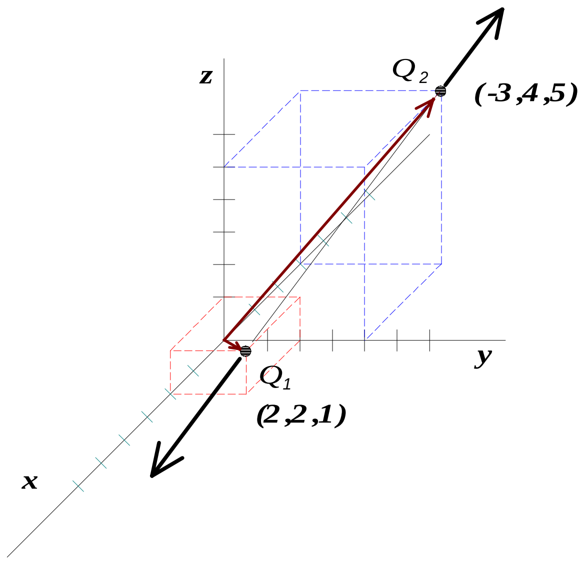


図 1-6 三次元での計算例

$$E = \lim_{\Delta Q_2 \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta Q_2} \qquad (1-11)$$

またこのときクーロン力の変化は

$$\Delta F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \Delta Q_2}{r^2} \qquad (1-12)$$

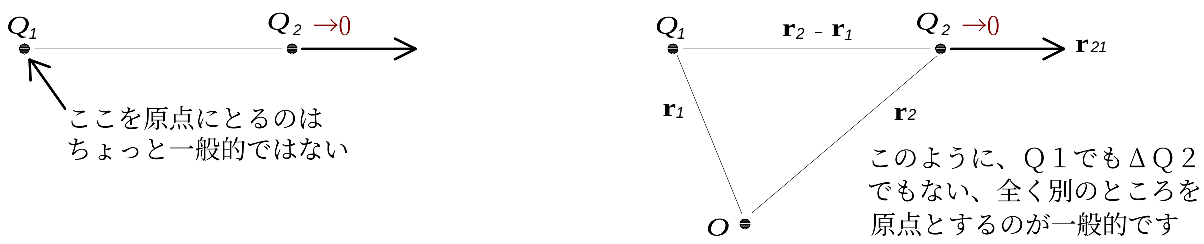
と表せますので、式(1-11)に式(1-12)を代入して、

$$E = \lim_{\Delta Q_2 \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta Q_2} = \lim_{\Delta Q_2 \to 0}\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \Delta Q_2}{r^2}}{\Delta Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2} \qquad (1-13)$$

となります。これが電界の強さです。しかしこの式では大きさが分かっても方向が分かりません。そこで、電界 E を $\mathbf{E}$ というベクトル表示にして、大きさと方向がわかるようにしてみましょう。式としては、

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\times \boxed{} \qquad (1-14)$$

という格好となりまして、$\boxed{}$ に方向が入ります。ここで



(a)　　(b)

図 1-7 原点の取る位置

原点をどこにとるかで式が変わってきますが、一般的には図1-8(b)のようになります。

図1-8(b)において

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$$

r と $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}_{210}$ の関係は

$$\mathbf{r}=r\mathbf{r}_{210}$$

したがって $\mathbf{r}_{210}$ は

$$\mathbf{r}_{210}=\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} \qquad (1\text{-}15)$$

従ってこの方向を表す式を、式(1-14)に代入してやれば

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\times\frac{r_2-r_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{r_2-r_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} \qquad (1\text{-}16)$$

となります。余談になるかもしれませんが、いま、Q の座標を (x_Q,y_Q,z_Q) とし、r_2 の座標を任意の点 (x,y,z) として、式(1-16)に代入します。(x,y,z) の方向単位ベクトルを $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ とすれば

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{i}x_Q+\mathbf{j}y_Q+\mathbf{k}z_Q$$

$$\mathbf{r}_2=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$$

$$\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\mathbf{i}(x-x_Q)+\mathbf{j}(y-y_Q)+\mathbf{k}(z-z_Q)$$

$$|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3=\left(\sqrt{\mathbf{i}(x-x_Q)^2+\mathbf{j}(y-y_Q)^2+\mathbf{k}(z-z_Q)^2}\right)^3$$

$$=\left(\mathbf{i}(x-x_Q)^2+\mathbf{j}(y-y_Q)^2+\mathbf{k}(z-z_Q)^2\right)^{3/2}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{i}(x-x_Q)+\mathbf{j}(y-y_Q)+\mathbf{k}(z-z_Q)}{\left(\mathbf{i}(x-x_Q)^2+\mathbf{j}(y-y_Q)^2+\mathbf{k}(z-z_Q)^2\right)^{3/2}}$$

となります。まぁ、式(1-16)と同じことなんですけど x y z 方向が、この式の方が明確に分かると思いまして参考まで。

さて、以上は電荷 Q が一つ(Q_1 により作られる電界と定義から、⊿$Q\to 0$ を使って求めた)のときの電界の強さを求めましたが、今度は二つ電荷があった場合どのような電界となるかみてみましょう。図1-9を見てください。点電荷が二つ存在したときを表しています。点Pに Q_1, Q_2 により作られる電界に影響を与えないような電荷⊿Q をおいたとき、点Pに働くクーロン力は⊿$\mathbf{F}_1$・⊿$\mathbf{F}_2$ であり、それぞれ Q_1・Q_2 による力を示します。また、⊿$\mathbf{F}$ は⊿$\mathbf{F}_1$　と⊿$\mathbf{F}_2$ の合力です。

以上により Q_1・Q_2 による電界はそれぞれ

$$\mathbf{E}_1=\frac{\Delta\mathbf{F}_1}{\Delta Q_1} \qquad \mathbf{E}_2=\frac{\Delta\mathbf{F}_2}{\Delta Q_2}$$

です。また

$$\mathbf{E}_1=\frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta Q}=\frac{\Delta\mathbf{F}_1}{\Delta Q_1}+\frac{\Delta\mathbf{F}_2}{\Delta Q_2}$$

となり、それぞれによる電界を計算し、その和をとったものとなります。よって二つ以上の点電荷による電界は、

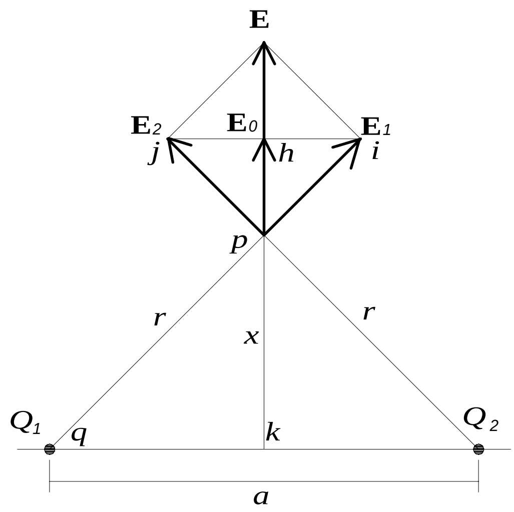


図1-8 2個の等しい電荷からなる電界の計算

$$\mathbf{E}=\sum_{n=1}^{n}\Delta\mathbf{E}_n \qquad (1\text{-}17)$$

となります。ここで例として二次元におけるにこの電荷によって作られる電界の大きさをあげるとして、図1-10のように、$Q_1=Q_2$ の電荷が距離 a に配置されている時、垂直2等分面上の点Pにおける電界を求めてみます。求め方としては、E_1 と E_2 を求めて、その二つをベクトル的に合成してあげればいいのです。$Q_1=Q_2$ ですから、電界の大きさは

$$E_1=E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

となります。$E_1=E_2$ ですから、ベクトル的な足し算は、図形から求めると簡単です。つまり E_0 を求めてあげて、E_0 を2倍してあげれば点Pにおける電界がでてきます。

いま、

$$r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2}$$

であり、△hipと△pqkは相似ですから、

$$\frac{ph}{pi}=\frac{pk}{pq}=\frac{x}{r}$$

したがって、

$$\frac{E_0}{E_2}=\frac{x}{r}$$

$$E_0=E_2\frac{x}{r}$$

$$\therefore E=2E_2 \ \ (=2E_1)$$

となります。

さて、つぎにはいよいよ本格的に 3次元空間に取り組んでみましょう。2次元のベクトル空間についての考え方がわかっていれば、3次元空間に話がとんでも理解できると思います。2次元空間でのベクトル表示についていまひとつよくわからないという人は、2次元空間でのベクトル表示方法をもう一度読み直しておいて下さい。でないとこんがらがります。

図1-9のように各電荷Qの中心に原点Oをとり3次元上の点Pにおける電界Eを求めてみましょう。Pは(x,y,z)任意の点にあるとします。

ベクトル$\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$の大きさr_1、r_2はそれぞれ

$$r_1 = |\mathbf{r}_1| = \sqrt{(x-d/2)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$

$$= \sqrt{(x-d/2)^2+y^2+z^2} \qquad (1\text{-}18)$$

$$r_2 = |\mathbf{r}_2| = \sqrt{(x-(-d/2))^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$

$$= \sqrt{(x+d/2)^2+y^2+z^2} \qquad (1\text{-}19)$$

となります。これはr_1ならQ:(d/2, 0, 0)を原点としたP:(x,y,z)の位置で、r_2についてはQ:(-d/2, 0, 0)を原点としたP:(x,y,z)の位置と考えて頂ければわかりやすいと思います。

まず$\mathbf{E}_1$､$\mathbf{E}_2$についてだしますが､ここでもスカラー量×方向という形で行ないます。

スカラー量については

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{{r_1}^2} \qquad\qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{{r_2}^2}$$

とすぐにでてきます｡そして方向については次式のように

$$\frac{\mathbf{i}(x-d/2)+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z}{r_1} \qquad\qquad \frac{\mathbf{i}(x+d/2)+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z}{r_2}$$

となります｡したがって$\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$は

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{{r_1}^2}\frac{\mathbf{i}(x-d/2)+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z}{r_1}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{i}(x-d/2)+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z}{r_1^3} \qquad (1\text{-}20)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{{r_2}^2}\frac{\mathbf{i}(x+d/2)+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z}{r_2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{i}(x+d/2)+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z}{r_2^3} \qquad (1\text{-}21)$$

よって$\mathbf{E}$は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{i}(x-d/2)+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z}{r_1^3} + \frac{\mathbf{i}(x+d/2)+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z}{r_2^3}\right) (1\text{-}22)$$

これをx,y,z成分の式にすれば

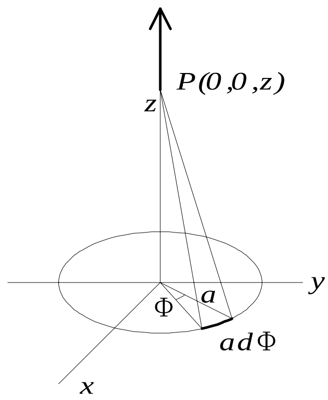


図1-9 円周状電荷からなる電界の計算

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\mathbf{i}\left\{\frac{(x-d/2)}{r_1^3} + \frac{(x+d/2)}{r_2^3}\right\} + \mathbf{j}\left\{\frac{y}{r_1^3}+\frac{y}{r_2^3}\right\} + \mathbf{k}\left\{\frac{z}{r_1^3}+\frac{z}{r_2^3}\right\}\right) \quad (1\text{-}23)$$

となります。

こうして 3次元における 2個の電界による電界を求めてきました｡続いては､点状電荷ではなく､線状電荷による電界を求めてみましょう。いま、図1-11に示されるようなP点の電界を求める場合を考えてみます。一見見た感じ難しそうですが、さほど難しい問題ではありません。これから積分を使った式がどんどんでてきますから、この問題は積分の使い方の練習と思っておいて下さい。

Qは点電荷ではなく円周上一様なものであるので、P点における電界の方向はz成分のみとなります。考え方は円周上の微少部分$ad\phi$によって作られるP点の電界の強さを求め、それを一周分集めればいいのです。

円周上にx軸から角度ϕの位置にある微小な長さ$ad\phi$をとれば、この上にある電気量は単位長あたりの電気量が$Q/2\pi a$であるので、

$$長さ\,ad\phi\,の電気量＝\ \frac{Q}{2\pi a}ad\phi = \frac{Q}{2\pi}d\phi \qquad (1\text{-}24)$$

$d\phi$からP点までの距離rは、ϕがいくらであろうと

$$r = \sqrt{a^2+z^2} \qquad (1\text{-}25)$$

となります。また、電界の方向は

$$r\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} \qquad \therefore \mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \mathbf{r}_0:単位方向ベクトル$$

ここで$\mathbf{r}$は

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}z$$

よって

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{i}0+\mathbf{j}0+\mathbf{k}z}{r_1} = \frac{\mathbf{k}z}{r} \qquad (1\text{-}26)$$

です。したがって、微小線分$ad\phi$による電界の強さは、

$$d\mathbf{E} = \frac{\frac{Q}{2\pi}d\phi}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{k}z}{r}$$

したがって$\mathbf{E}$は

$$
\mathbf{E}=\int_0^{2\pi}\frac{\dfrac{Q}{2\pi}\mathbf{k}z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,d\phi=\frac{\dfrac{Q}{2\pi}\mathbf{k}z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}2\pi
$$

$$
=\frac{Q\mathbf{k}z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\mathbf{k}\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}} \qquad (1\text{-}28)
$$

となります。

こうして各点での電界とその方向を求められたわけですが、この電界中での各点で電界Eを求め、その電界**E**の方向を一つの曲線で結ぶと電界がどのようになっているのかを示す空間曲線群がえられます。この曲線を電気力線といいます。電気力線の性質として

(i)電気力線は電界に描かれた空間曲線で、線上の任意の点でその接線が電界の強さの方向を示す。その方向は、電位の高い方から低い方へ向かう。
(ii)電気力線は正の電荷からでて負の電荷に入るか無限遠にいく。
(iii)ふたつの電気力線は交わらない。
(iv)静電界においては電気力線は閉曲線にならない。
(v)電気力線は等電位面と直交する。

等電位面についてでてきましたが、これについては後述しますので、そのときにまたご覧くださいませ。それでは、図1-12にこの電気力線の例を上げます。

1-2　電荷を動かす仕事

電界中に電荷Qを置きます。そして、この電荷を動かしてやったとしましょう。この時に電荷の持つエネルギーの増加・減少の量を仕事量といいます。では、電荷の持つエネルギーとは一体なんでしょうか。いうなれば、位置エネルギーがこれにあたります。ボールを地上から上に持って行けば持って行くほどボールの位置エネルギーが大きくなるというあれです。「位置エネルギーって何じゃい？」という人のために簡単に説明しておきます。いまボールを地べたからある高さにまで持ち上げ、手のひらなり、机なりにおいておくとしましょう。このときボールはその高さに比例した位置エネルギーを持つわけです。何が位置エネルギーかというと、ひとたび支えがなくなればボールは "落っこちる" という運動をするわけですから、"落っこちる" ためのエネルギーがあるということです。

図1-12　2個の電荷による電気力線の分布

電界の中に正電荷Qをおいて、特に支えがなければその電荷は力を受けて電界方向に移動します。つまり、電荷が電界中にいると、その点における位置エネルギーを持つことになり、また移動することにより位置エネルギーは消費されます。すなわち移動という仕事をしていることになるのです。この時の仕事量は、移動という仕事をしているので正の値にて表されます。また、電界から受ける力に対抗して、電界の発生源へと電荷を移動させたとします。すると、電荷には位置エネルギーが蓄えられ、仕事量としては負の値となります。つまり電界に電荷Qを置いて、電界から受ける力により電荷が吹っ飛ばされることが電荷にとって仕事をしていることになり、またそれとが逆方向に外部から力を加えて電荷を移動させることがエネルギーをためることになる訳です。では、実際にこの仕事量の値はどのように表されるのかを考えてみましょう。

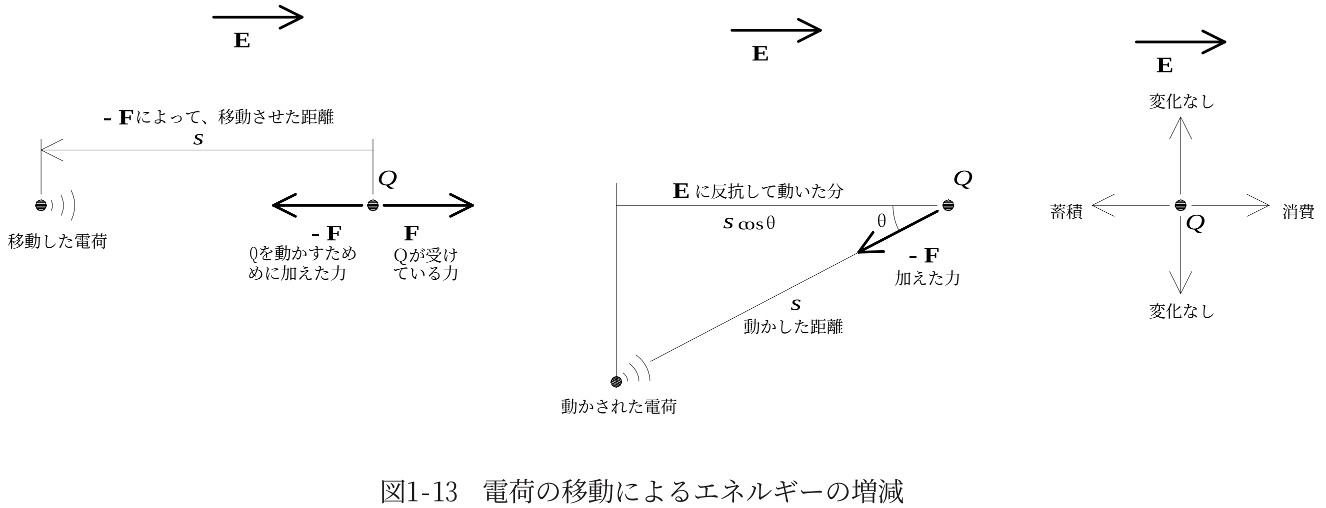


図1-13　電荷の移動によるエネルギーの増減

仕事量とというものは、その電荷を動かすのに加えた力 **F** と、動かした距離 **s** の積で表されます。ただ、**F** と **s** は電荷が動く(動かされる)方向により、仕事量が変ってくるのでベクトルを使って表します(あとで述べますが、掛け算は内積となっていることに注意)。

$$W = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{s} \qquad (1\text{-}29)$$

ここで、**F** というものは式(1-10)と式(1-16)を見比べてみれば、

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$$

と表されますから

$$W = -Q\mathbf{E}\cdot\mathbf{s} \qquad (1\text{-}30)$$

となります。

こうして、ある方向に電荷を動かしたときの仕事量がどのくらいになるのかを求める式が出来上がりました。ここから更に、図1-14のように電荷をくねくねと動かしたときの仕事量がどうなるかを考えてみましょう。電荷Qが点Aから点Bへcという道筋を通って移動させたときの仕事量を求めるには、この道筋cを微小距離dsに分解し、各微小距離ごとの仕事量の増減を累積していきます。このようにcという道筋において、微小距離dsによるエネルギーの変化を集めていくような操作を線積分といいます。また、cのような道筋を積分路といいます。微小距離をdsとし、その微小距離だけ電荷を動かすと仕事量dwは、式(1-30)より

$$dW = -Q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (1\text{-}31)$$

となります。そして、図1-14のようにdsによる仕事を積分路cに沿って点Aから点Bまで集めた仕事量W_{AB}は、線積分により

$$W_{BA} = \int_A^B (-\mathbf{F})\bullet d\mathbf{s} = -Q\int_A^B \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s} \qquad (1\text{-}32)$$

ここで**E**を積分路にそってEsとあらためれば(Esはスカラ量dsという積分路方向の成分の大きさで、スカラ量になる)

$$W_{BA} = -Q\int_A^B Esds \qquad (1\text{-}33)$$

となります。次に点電荷Qを無限遠点から点Bまで運ぶ仕事を考えれば

$$W_{B\infty} = -Q\int_\infty^B \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s} = Q\int_B^\infty Esds$$

これは、これだけ点電荷にエネルギーを与えたことになります。逆に言えば、点電荷QがBにおかれているとその保有する電気エネルギーW_BはQと$Esds$の積であるといえるのです。すなわち

$$W_B = W_{B\infty} = Q\int_B^\infty Esds$$

となります。

話はかわりますがベクトルどうしの積においては

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$$

\———— 中黒

のように中黒を忘れないこと。これは「ベクトルの内積ですよ」という印ですから。積は積でも

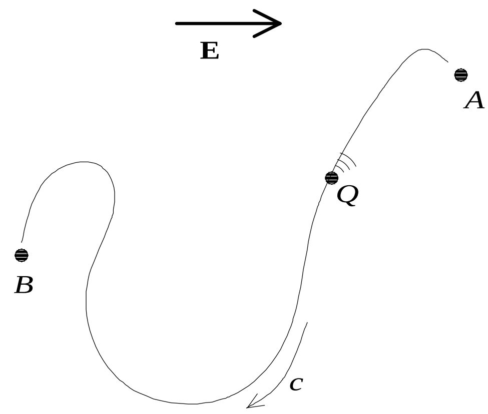


図1-14　くねくねした道筋における仕事量

$$\mathbf{E}\times d\mathbf{s}$$

とやってしまうとこれは外積を意味することになってしまいます(内積と外積の違い......代数幾何ですよ、代数幾何)。また

$$\mathbf{E}d\mathbf{s}$$

とやってしまうと内積なんだか外積なんだかわからないですね。ですからベクトルの積をあらわすときは、・とか×をちゃんとつけましょう。

1-3　電界と電位にポテンシャル

1-3-1　電位と電位の基準点

仕事というものが電荷を動かしたものであることはすでに述べました。いま、式(1-35)をちょっと変形してみます。

$$\frac{W}{Q} = -\int_A^B \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s} \qquad (1\text{-}36)$$

ここで、この式でのW/Qは単位電荷を点Aから点Bまで動かすのに必要な仕事であり、これをV_{BA}と表します。そしてこの仕事V_{BA}をAB間の電位差といいます。突然電位差などという言葉がでてまいりました。まだ電位の言葉の定義もしていないのに・・・・。まぁすぐに電位の説明をしますのでご安心を。

電位というものは簡単にいえば物理でいう位置エネルギーと同じです。そして、基準点は無限遠、つまり電界の端っこの方の十分に電界が弱いところと考えてもいいでしょう。仕事でも位置エネルギーの話が出てきましたが、ここでは単位電荷を動かすことがみそです。いま、点電荷Qの作る電界から遥か彼方のところに電荷Q_1を起きます。十分Qから離れているためQ_1にクーロン力は働きません。この点電荷Q_1をQに近づけていきます。これが仕事、図1-13で説明した電荷を動かすということです。するとだんだん電荷はクーロン力が働きます。ひとたびこの近づける力を無くせばQはクーロン力により再び無限遠のかなたへと吹っ飛ばされますが、ここでは点Aまで持ってくるとします。すなわち

$$\frac{W}{Q} = -\int_A^B \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = V_{A\infty} = V_A \qquad (1\text{-}37)$$

この V_A が点 A での位置エネルギーで電位といい単位は〔V〕で表されます。先のボールの例での地上高が　この電位ともみれ、無限遠のときの電位は　0〔V〕で、Q に近づくにつれ電位は上昇します（Q が　正の時です。負ですと、無限遠で電位　0〔V〕、近づくと電位が下がっていきます)。さて、今まで無限遠を電位　0〔V〕としてまいりましたが、無限遠以外にも電位　0〔V〕となるところが存在します。それは大地です。地球の地べたは電位　0〔V〕と考えるのが一般的です。これから接地ということが頻繁にでてきますが、それは大地につながっていて、電位　0〔V〕ということなのです。次に、基準を大地や無限遠以外の場所にとったときの電位を考えてみます。これが式(1-37)に示されるもので、この式では基準をＢとしたときの点Ａの電位ということで VBA とかきます。この VBA というのは次式のように変形でき

$$V_{BA} = \left(-\int_\infty^B \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} \right) - \left(-\int_\infty^B \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} \right)$$

すなわち

$$V_{BA} = V_{B\infty} - V_{A\infty} \qquad (1\text{-}38)$$

ということになり、V_B と V_A の電位差ということになります。当然のことながら基準点を移動させれば、ある点における電位の値も変わってまいります。図 1-15 を見て下さい。基準点を点Ａとした場合と点Ｂとした場合のＰ点における電位を求めてみれば

$$V_{PA} = -\int_A^P \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} \qquad (1\text{-}39)$$

ここで基準点を点Ｂに移動させると

$$V_{PB} = -\int_P^B \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = -\int_A^P \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} + \left(-\int_B^A \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} \right) \qquad (1\text{-}40)$$

しかるに

$$V_{PB} = V_{PA} + V_{AB}$$

このことから基準点を移動させると電位の値が変わることが分かると思います。

　では次に図 1-16 に示したような、電荷が密度ρ(r)〔C/m³〕で領域 v の中に分布していたときにおける、任意の点Ｐでのポテンシャル V を求めてみましょう。この領域内の微小体積により作られるポテンシャル dV は、この微小体積 dv と任意の点Ｐとの距離が｜ r_P − r ｜ですから

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\rho(r)dv}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}|} \qquad (1\text{-}41)$$

したがって、領域内全電荷によって作られるＰ点のポテンシャル V は

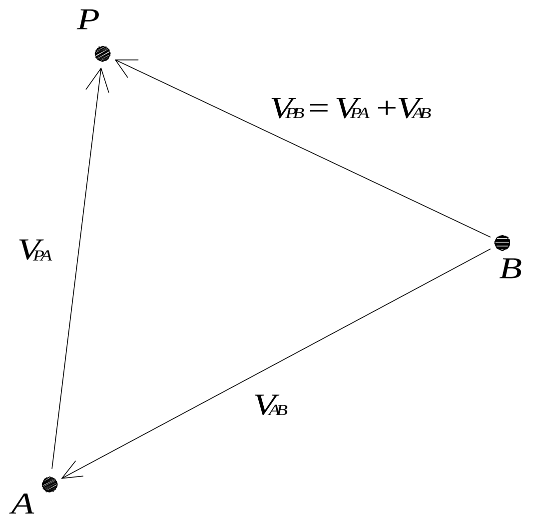


図 1-15　電位の基準

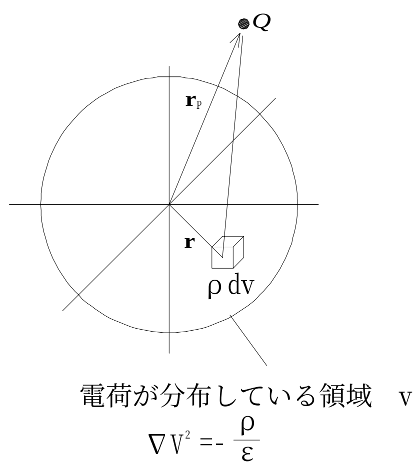


図 1-16　電荷の空間分布とポテンシャル

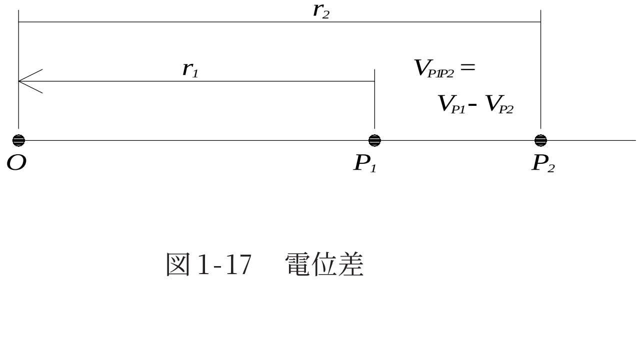


図 1-17　電位差

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(r)dv}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}|} \qquad (1\text{-}42)$$

となります。

1-3-2　等電位面

図 1-17 において P_1, P_2 間の電位差は、

$$V_{P1P2}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_2}^{r_1}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \qquad (1\text{-}43)$$

と表されます。ここで、r_1, r_2 は距離だけで方向については特に示されていいことがポイントです。つまり、r_1 と r_2 の距離なら P_1, P_2 がどの位置にあっても電位差は同じとなります。このことは、積分路によらず電位差は同じになるといえます。何故こうなるのかは、このすぐ後の項で説明します。

さて、電界内で電位の同じ点を連ねると曲面を得ることができます。これを等電位面といいます。いわゆる天気図の等圧線なんかと同じようなものです。図 1-19 にその一例を挙げておきましょう。ふつう、このような電位分布図をＦマップと呼んでおります。

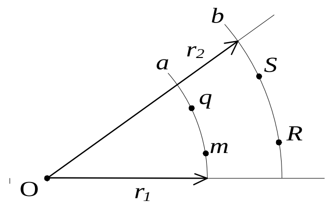
では等電位面の性質についてつぎに挙げておきます。

(i)　等電位面は閉曲面である。
(ii)　二つの異なる等電位面は交わらない。
(iii)　等電位面の内部に電位の高い等電位面があれば内部に正電荷が存在し、逆に電位の低い等電位面があれば負電荷が存在する。
(iv)　電気力線と等電位面は直交する。
　c.f　導体の表面は等電位である。
　　点電荷のつくる電界の等電位面は同心球であり、無限遠長直線電荷のつくる電界では同心筒の等電位面となる。

こうして、電位というものを述べてきましたが、ようするにその点の電位とは無限遠点よりその点までもってくる仕事とかエネルギーというわけです。そしてある電界中にて同じ電位であるところの点を集めてできた線（2 次元では線です。3 次元にすると面となる）が等電位面なのです。

1-3-3　電位の傾きを表す grad について

電界というベクトル界 **E** においては、電位というスカラ量 $V(x,y,z)$ の分布を表すことができました。そして、図 1-19 のような電位というスカラ量によって表



a の線上の任意の点と b の線上の任意の点の電位差は、任意の点どこをとろうと同じ。つまり、m と R の電位差も、q と S の電位差も、m と S の電位差もすべて同じ。

図 1-18 ひとつの電荷により作られる電位

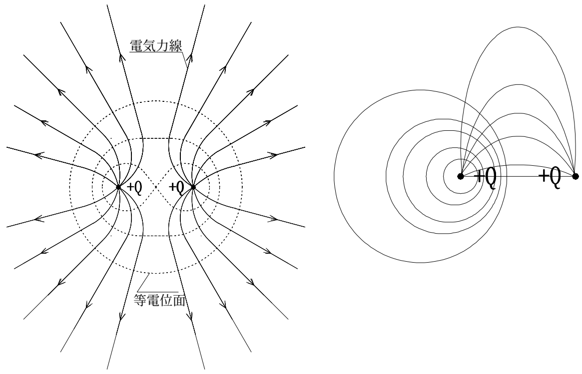
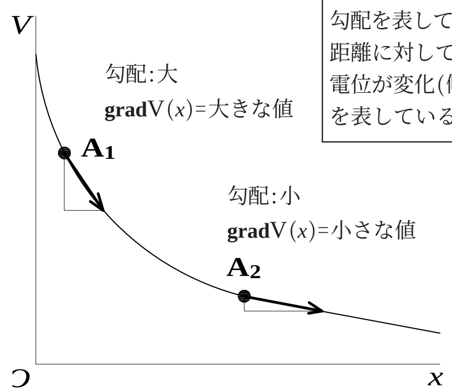


図 1-19 ふたつの電荷により作られる電位

点 a,b における ベクトル $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2}$ は、その点におけるスカラ界Vの勾配を表しています。
距離に対してどれだけの割合で電位が変化(傾き)しているのかを表しているのが**grad**です。



$\boldsymbol{A}$ = **grad**V
スカラ界Vの勾配は、ベクトルで表すことが出来ます(どの方向にどれだけの大きさで傾いているか、ということでベクトル量になります)

図 1-20 grad とは

される空間を、スカラ界ともいいます。電位分布を山の高さと考えれば、山の斜面の傾き具合が電界の強さ、傾きの方向が電界の方向といえます。ここで大事なことは、ある点におけるスカラ量の傾きの大きさと方向は、ただ一つしかないということです。つまり、ある点における電界 **E** は、その点におけるスカラ量の勾配⊿ V と方向により一意的に決まるのです(斜面に

ボールをおいたとき、転げ落ちる方向が傾きの方向です)。このことは、一般のベクトル界にもいえ、ベクトル界においてある点でのベクトル**A**はスカラ界の勾配を表し、このベクトル**A**をスカラ界Vにおける勾配と呼び

$$\mathbf{A} = \mathrm{grad}V \qquad (1\text{-}44)$$

と表します。このときVは**A**のスカラポテンシャルといいます。

電位の傾きと言えばその字のごとく電位が距離に対しどの程度の傾きを持っているかを表しております。図1-20を見てください。この図は距離に対する電位の一例です。ここではとりあえずx軸方向のみを考えていきます。

距離 0というのは電界を作っている"もと"である電荷そのものの位置と思ってください。電荷から距離が離れれば電位は落ちていきます。このグラフにおける傾きが電位勾配で、ベクトル界に出てくるgradを使って表すことができます。傾きというからには微分ですから、この場合

$$\frac{dV(x)}{dx} = \mathrm{grad}V \qquad (1\text{-}45)$$

となります。空間中で電位勾配を考えるには(x, y, z)の三方向成分を考えなければならず、gradVを 3次元で表すと

$$\mathrm{grad}V = \mathbf{i}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \qquad (1\text{-}46)$$

と各方向成分の傾きをベクトル表示したものとなります。さて、最初にも述べましたが、電界と電位というものは密接な関係を持っておりまして、図1-21に示されますように、電界が強ければ同じ距離を動かしただけでも電位は大きく変わります。ところで電位は電界を積分して求められました。そして式(1-44)は電位を微分しております。すなわちこれが電界となり

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}V \qquad (1\text{-}47)$$

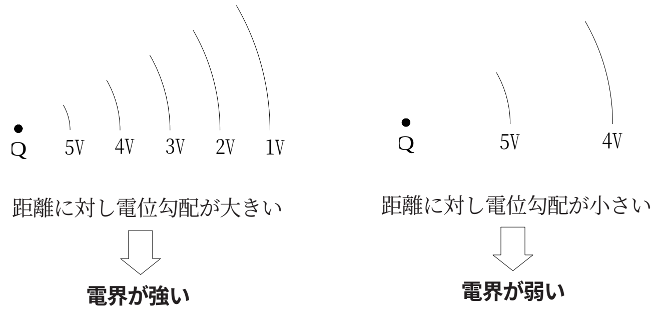
なる関係となります。負号がついているのは電界発生源である電荷Qより離れると電位が落ちるという傾きを正とするためです。この式から空間電位分布が分かれば、電界の様子が分かるのです。x軸方向の電界の強さExが知りたければ"$\partial V/\partial x$"、y軸方向の電界の強さEyが知りたければ "$\partial V/\partial y$"、そしてEzは "$\partial V/\partial z$"、ベクトルで知りたければ式(1-46)を使えばいいのです。なお、数式で取り扱うときに、いちいちgradと書くのは大変ですし、またgradの中身は微分ですから、gradを微分演算子∇で表して

$$\mathbf{E} = -\nabla V \qquad (1\text{-}48)$$

とすることがよくあります。

さて、ここで静電界においての線積分は積分路によらず始点と終点で決まるということを、電位というポテンシャルを用いて説明いたします。

図1-22は電位分布の一部です。それぞれ点Aから点



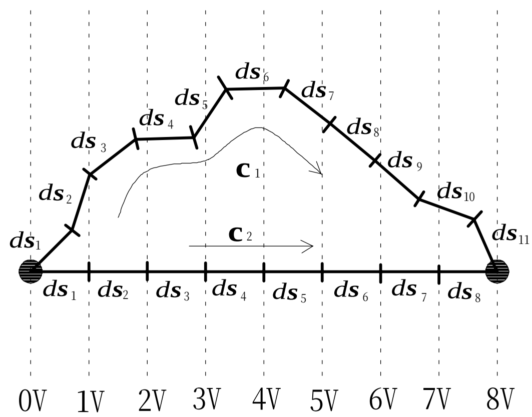
電位の傾き(電位勾配)は電界の強さを表す

傾き＝**grad**

$$\mathrm{grad}V = \mathbf{i}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}$$

x方向の電位の傾き　y方向の電位の傾き　z方向の電位の傾き

図1-21　電界と電位



ds_1	ds_2	ds_3	ds_4	ds_5	ds_6	ds_7	ds_8	ds_9	ds_{10}	ds_{11}	計
0.7	0.3	0.9	1.0	0.6	1.0	0.8	0.7	0.7	0.9	0.4	8.0
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	—	—	—	8.0

図1-22　線積分は、積分ン路によらない

Bまでの線積分をc_1, c_2という積分路をとって行っております。線積分ですから積分路$d\mathbf{s}$(積分路は、方向の要素もありますから、ベクトルになります。そのためsは太字**s**になっていることに注意)による電位の変化を点Aから点Bまで集めてやればよいのです。今、点Aからの線積分を$d\mathbf{s}_1, d\mathbf{s}_2, d\mathbf{s}_3$・・・・$d\mathbf{s}_{11}$としますと、積分路$c_1$をとったときと$c_2$にとった時では図1-22のようになり、$c_1$でも$c_2$でも点Aから点Bへ積分路dsにより変化した電位を集めた(積分した)結果は同じとなります。このことは、坂道を上ることに例えると分かりやすくなります。図1-21における 1〔V〕を 1〔m〕の高さ、 8〔V〕を 8〔m〕の高さとして、一つの坂道を考えます。そしてこの坂を上る道が積分路です。どういう道のりをとろうと上った高さは8〔m〕です。線積分では各$d\mathbf{s}$によりどれだけエネルギーがあるのかを集めるものでこの場合は高さなのです。つまり真横に歩いては上ることになっていませんからエネルギーは 0ですし、斜めに上れば同じ距離歩くにしてもまっすぐ上るより高さは稼げません。結果として点A一点B間の線積分は点A一点B間の高さの差となります。こ

れが、線積分は積分路によらないということです。そして、このことはポテンシャルを持つ空間(ポテンシャルを持たない空間がどんなものかは、磁界のところで述べます)でいえることなのです。

図1-22で積分路をどうとってもその値は始点と終点で決まってしまう原理を述べました。ここでちょっと見方を変えてみましょう。点Aから点Bまでc_1という積分路をとり、BからAまでc_2という積分路をとる。すなわちA→B→Aとぐるっと一周する積分を考えます。このように積分路が一週ぐるりと回る線積分を周回積分といいます。図1-22は積分路dsを細かくとってしまいましたので説明において式がだらだら長くなってしまいますから、もっと大まかにしてしまったものを図1-23に示します(もはや微小距離dsではない？ それでもdsと見てください)。図1-23を周回積分で表すと

$$\oint_{c} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} \qquad (1\text{-}49)$$

となります。積分のマーク(インテグラル)にくるりとまるい印がポイント。これが「周回積分だよ」ということを表します。積分路はcという道のりでぐるっと周り、微小距離dsによる電圧変化はこの式ではds_1からds_6まで集めます。ちょっとやってみますと

$$\oint_{c} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = \underset{ds_1}{0.8} + \underset{ds_2}{1.0} + \underset{ds_3}{0.2} - \underset{ds_4}{1.0} - \underset{ds_5}{0.8} - \underset{ds_6}{0.2} = 0[V]$$

となり一周すると 0になります。図をみればもう当たり前のことだと思うかもしれませんが、ポテンシャルを持つ空間だからこそ周回積分が 0になるのであって、ポテンシャルを持たない空間においては 0にならないのです。ポテンシャルを持つとか、持たないとか、ちょっとわかりにくいと思いますが、磁界のところでポテンシャルを持たない空間(電流磁界)というのをやりますので、そこまで読み進むとわかってくると思います。ですから、いまは周回積分の意味だけを理解していただければと思います。

1-4　ガウスの定理

いよいよガウスの定理というものがでてまいります。このガウスの定理なるものがでてくると 「う～ん、電磁気学!!」 ってな感じで、なんか難しそうではありますが、しかし、ガウスの定理は非常に大事な事柄ですので、しっかりと理解、理解。

ガウスの定理というと電束という概念がでてくるのですが、この電束という概念は真空中以外の電界を取り扱うときに必要なものであって真空中では必要ないので、この概念は後回しにいたします。これからお話しする内容はすべて真空中でのことです。

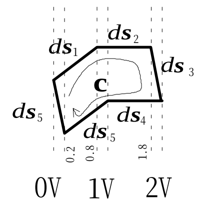
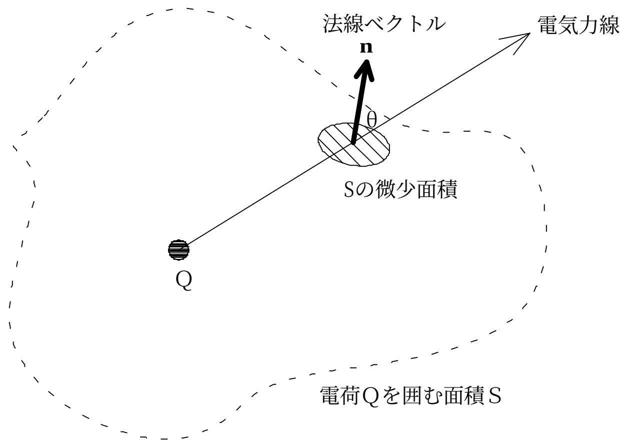


図1-23　周回積分



S全体から出ていく電気力線の総数

$$N = \int_{S} \mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\, dS \quad [本]$$

このSは、「Qを囲む球面の面積を集める」という面積分を意味します。

図1-24　ガウスの定理

真空中の電界について閉曲面Sを取りS面を出入りする電気力線は(出る方を正とする)、

$$\text{S 面を出ていく電気力線数} = \frac{1}{\varepsilon_0} \times (\text{S 面内の電荷の和}) \qquad (1\text{-}50)$$

で表わされます。これをガウスの定理といいます。ようは、ある領域から出て行く電機力線の本数は、その領域内の電荷の和に1/ ε_0を掛けたもの、という言葉で言うと単純なものです。問題は、これを数式で、しかも大きさと方向がからむベクトルで表そうということです。このようなことをベクトルでどう表すのか、数式での表現の仕方を学ぶ良い機会ですから、じっくり見ていきましょう。

ということで、ガウスの定理を、さらに詳しく見ていきましょう。まず電気力線の性質の一部をつぎに掲げます。

* 単位ベクトルとします。つまり　方向が垂直な方向単位ベクトル＝法線ベクトルです。

電気力線の密度は、その点の電界の強さを表わす。電界の方向と垂直な１(㎡)の面積あたりＥ本の電気力線は通っている。その点はE(V/m)の電界の強さである。

次に閉局面Sの一部dSをとり、そこより出ていく電気力線数を考えます。定義より、ベクトルとして微少面積dSより垂直、すなわち法線ベクトル＊の方向に１(㎡)あたり(単位面積あたり)１本であるから、次式を得ます。

dS面をでていく電気力線数$dN = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$　(1-51)

ここに$\mathbf{n}$は法線単位ベクトルです。また電界$\mathbf{E}$にも方向があるので、$\mathbf{E}$をEとしてはいけません。

式(1-51)よりdSより出ていく電気力線数は求められました。この式から全面積Sより出ていく電気力線数Ｎは

$$N = \int_S \mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\, dS \qquad (1\text{-}52)$$

これが、あの長ったらしい言葉で表したガウスの定理を、数式で表現したものなのです。ここで$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$を次のように変形し、$dN$について考えてみましょう。

$dN = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E\cos\theta\, dS$　(1-53)

この変形はベクトルの内積を用いたものです。つまり$\mathbf{E}$の大きさをEとし、方向ベクトルを$\mathbf{i}e$、$\mathbf{n}$の大きさは1(単位ベクトル)だから

$$\mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\, dS = E\,\mathbf{i}_e \bullet 1 \bullet \mathbf{n} \bullet dS = E\,\mathbf{i}_e \bullet \mathbf{n} \bullet dS$$

$$= E\cos\theta\, dS$$

式 (1-53)においてＥは

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (1\text{-}54)$$

ですから微少面積dSを出ていく電気力線数dNは

$$dN = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\, dS \qquad (1\text{-}55)$$

となります。ここでdSを見込む立体角(後述)$d\omega$は

$$d\omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} \qquad (1\text{-}56)$$

と表せますから、式(1-55)にｄωを含めれば

$$dN = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta\, dS}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\varpi \qquad (1\text{-}57)$$

となり、全面積よりでる電気力線数は

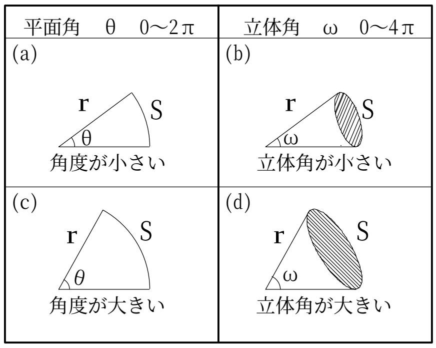


図1-25　立体角と平面角

$$N = \int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\varpi \qquad (1\text{-}58)$$

この積分はQがＳ面内のとき４πとなり、Ｓ面外のときは 0となりますから式(1-58)は

$$N = \begin{cases} \text{QがＳ面内} & \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \\ \text{QがＳ面外} & 0 \end{cases}$$

となり、結果としてＳ面内では

$$\mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}Q \qquad (1\text{-}59)$$

ここでQがＳ面内に複数あるときは次式となります。

$$\mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q \qquad (1\text{-}60)$$

よって、真空中において閉局面Sを考えS面を出ていく電気力線数はS面内にある電荷の和の１／ε_0という、言葉の式(1-50)のことが数式で表せたんだということがわかると思います。

1-4-1　立体角について

立体角という角度は聞き慣れないものですが、これがどういったものかを説明しましょう。角度といえば、いままでは図1-25(a)のような角度がありました。この角度は平面角と呼ばれるもので、次式で定義されているものです。

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (1\text{-}61)$$

この場合ｒはｓに比例し、角の開き方にのみ依存するからこのような定義が生まれるのです。

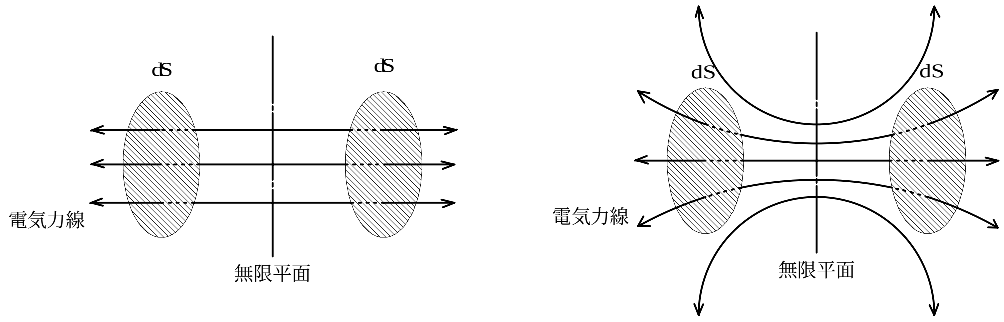


図 1-27　無限に広い平面電荷を考える

これと同じことで、任意の錐体では頂点Ｏを中心として半径ｒの球面を考え、錐体内にある球面の部分の面積を S とすると S は r^2 に比例し、比例定数は錐体の開き方によってのみ決まるのです。そこで

$$\omega = \frac{S}{r^2} \qquad (1\text{-}62)$$

として、このωを錐体の立体角といいます。

つぎにこのガウスの定理を応用して、無限長直線状電荷や無限に広い平面状電荷などが作り出す電界を求めてみましょう。

1-4-2　無限長直線状電荷による電界

図 1-26 のような無限直線上電界によって作られる電界を求めてみましょう。

半径 r で長さ l の円筒の表面においてガウスの定理を適用します。

$$\int \mathbf{E}\bullet\mathbf{n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}Q \qquad (1\text{-}63)$$

電気力線数は次式で表わされる。

$$\text{電気力線数} = \int \mathbf{E}\bullet d\mathbf{S} = 2\pi rlE \qquad (1\text{-}64)$$

またＱについてはλがでているので、

Ｑ＝λｌ

したがって式（1-64)は

$$2\pi rlE = \lambda l\frac{1}{\varepsilon_0}$$

となり、この r における電界は

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad 1\text{-}65)$$

となります。ではここで電位をだしてみましょう。定義式より

$$V = -\int_\infty^r \mathbf{E}\bullet d\mathbf{S} = -\int_\infty^r E\mathbf{i_e}\bullet\mathbf{i_r}dr = -\int_\infty^r Edr$$

$$= \int_r^\infty \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{1}{r}\right]_r^\infty = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\log\frac{\infty}{r}$$

となってしまい、結果がでてきません。このことから、V は無限遠から規定すると定まらないといえます。つまり、無限円直線上電荷の作る電界は、無限遠を基準にした電位は考えられず、有限点を基準にしないと電位は出てきません。

有限点を基準にしたときの電位は

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\log\frac{r_0}{r} \qquad (1\text{-}67)$$

となります。

1-4-3　無限に広い平面電荷(平面電荷密度　が一様)

図 1-28 のような平面電荷を考えるとき、電気力線は図 1-27(a)のようにまっすぐ進むとし、(b)のように曲がったりしないものとします。ここで両ｄＳ面を出る電気力線はガウスの定理により

$$EdS\times 2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\delta\ dS \qquad (1\text{-}68)$$

となります。2 倍となっているのは、左右の面積のをとっているためです。いま面積を単位面積とすれば式(1-68)は

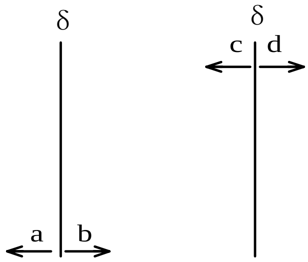


図 1-28　無限平面の電界を考える

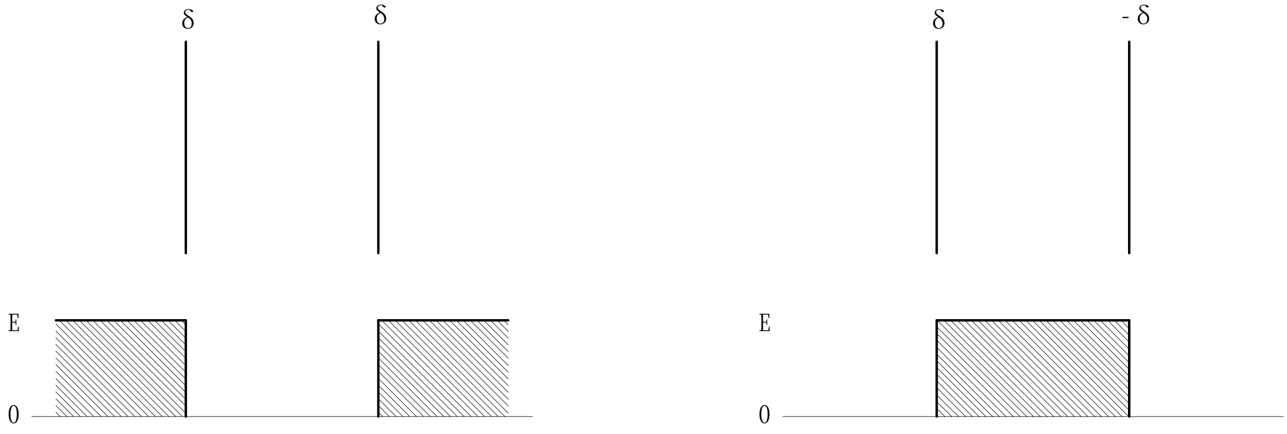


図1-29　無限に広い平面電荷による電界

$$2ES = \frac{\delta S}{2\varepsilon_0} \qquad (1\text{-}69)$$

これより電界は

$$E = \frac{\delta}{2\varepsilon_0} \qquad (1\text{-}70)$$

と距離xに無関係になり、これを平等電界といいます。では次に面電荷密度δ(C/㎡)の無限平面を平行に配置させた場合についてを考えてみましょう。

図1-28のように面電荷密度δの無限平面を平行配置します。それぞれの電気力線をa,b,c,dとします。これら電気力線a,b,c,dの電界は式(1-70)によりすべて

$$E = \frac{\delta}{2\varepsilon_0} \qquad (1\text{-}71)$$

となります。左向きの電界については、aとcの2つすなわち2Eなる電界となり、右についても同様bとdにて2E、そして電極間はbd互いに反対向きで0となります。したがって電界の強さをグラフにすると図1-29(a)のようになります。また図1-29(b)に片平面が－δであるときの電界分布を示します。

1-5　各種静電容量の計算

電界を求めることができると、そこから静電容量を求めることができるようになります。ここでは、基本となる平行平板コンデンサから、伝送線路のところで必要となる同軸コンデンサや、平行導線間の静電容量などを求めるとします。

1-5-1　平行平板コンデンサ

いま間隔にくらべて面積は十分に広いとすると、図1-30において電界は

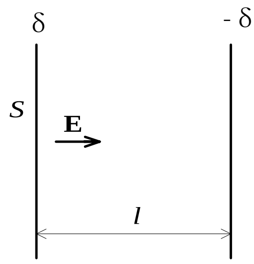


図1-30　平行平板コンデンサ

$$E = \frac{\delta}{\varepsilon_0} \qquad (1\text{-}72)$$

となります。これは、

$$E = 2 \times \frac{\delta}{2\varepsilon_0} = \frac{\delta}{\varepsilon_0}$$

からです。ここで無限に広い平面電荷により作られる電界は平等電界ですから

$$V = \frac{\delta}{\varepsilon_0} l \qquad (1\text{-}73)$$

また

$$\delta = \frac{Q}{S} \qquad (1\text{-}74)$$

となります。なお、ここにおいてS周辺の電界の乱れは無視します。式(1-74)を式(1-73)に代入すれば

$$V = \frac{Ql}{S\varepsilon_0} \qquad (1\text{-}75)$$

また、静電容量は$Q = CV$　$\therefore C = Q / z$より

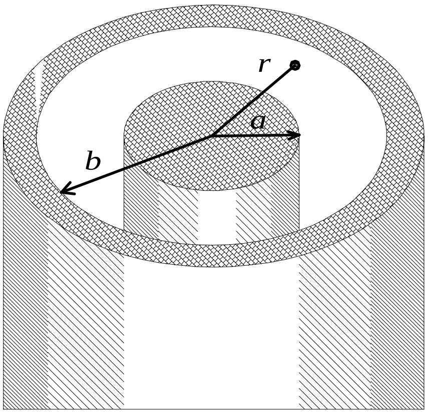


図1-31 同軸コンデンサ

$$C=\frac{Q}{\frac{Ql}{S\varepsilon_0}}=\frac{\varepsilon_0 S}{l} \qquad (1\text{-}76)$$

となります。これが、平行平板コンデンサの静電容量です。

1-5-2　同軸コンデンサ

よく使われる同軸ケーブルの特性インピーダンスの計算とか、シールド線の静電容量などの計算に用います。後者は、「え～と、この機器に数ｍひっぱりまわしたシールド線を入力端子に接続して . . . . . あれま、なんか上手く動作しない。静電容量を概算してみると、げげっ！こんなに容量を持つのか。たしかにこれじゃだめだ」などと、現場で役立ったりします。

いま、図1-31においてｒ点の電界は

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (1\text{-}77)$$

となります。これから電位Ｖは式(1-65)より

$$V=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log_e\frac{b}{a} \qquad (1\text{-}78)$$

また単位長当たりの静電容量は

$$C=\frac{\lambda}{V}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\log_e\frac{b}{a}} \qquad (1\text{-}79)$$

となります。

1-5-3　平行導線間の静電容量

図1-32のような平行導線において各導線間ABにそれぞれ、単位長当
たりλ、－λの電荷を与えたとき、この間の一点P(銅線Aの中心から距離x)　における電界の強さは、右向きを正として

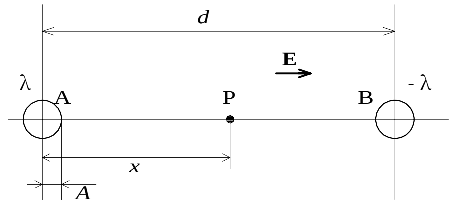


図1-32 平行導線

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x} \qquad (1\text{-}80)$$

電位差は図1-32により

$$V_{AB}=-\int_B^A E\,dx=\int_A^B E\,dx=\int_a^{d-a}\left\{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{d-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)dx=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\log|x|-\log|d-x|\Big]_a^{d-a}$$

$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\log\frac{d-a}{a} \qquad (1\text{-}81)$$

これより単位長当たりの線間静電容量は

$$C=\frac{\lambda}{V}=\frac{\lambda}{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\log\frac{d-a}{a}}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\frac{d-a}{a}}\approx\frac{\pi\varepsilon_0}{\frac{d}{a}} \qquad (1\text{-}82)$$

ここで、近似は、ｄ≫ａという条件からです。

なお導線が地表近くにおるときは大地に対する静電容量をもつので、これを考慮致しますと、式(1-82)は変わってまいります。

1-6　div・ポアソン・ラプラスの方程式

最初に行っておきますけれど、ここでdiv(ダイバージェンスと読む)とかポアソンとかラプラスなどといった新しい言葉がいろいろでてきます。ということはここを読むのは大変か？と思われそうですが、それは違います。新しい言葉がいろいろでてくるということは、それだけ知識が増えるということです。「なんだかわかんね～」 と後ろ向きに考えず、「新しい知識がどんどん増えてるぜ」といった気持ちで行きましょう。

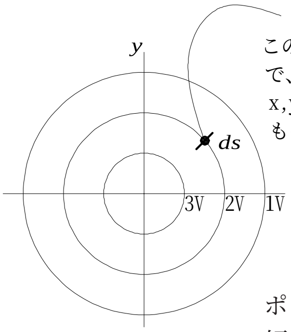
いきなりでなんですが、divの説明をいたします。これからdivをどんなふうに使っていくかを先に行ってしまいますと

$$\mathrm{div}\mathbf{E}$$

という形で使います。内容としては、

$$\mathrm{div}\mathbf{E}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{E}=\mathbf{i}\frac{\partial E_x}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial E_y}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

となります。「何じゃこれ、gradと同じじゃないか。と



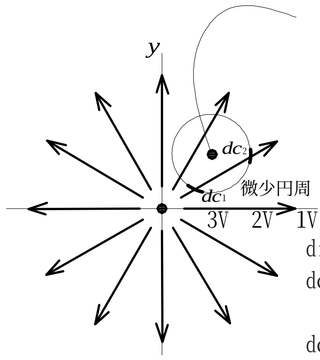
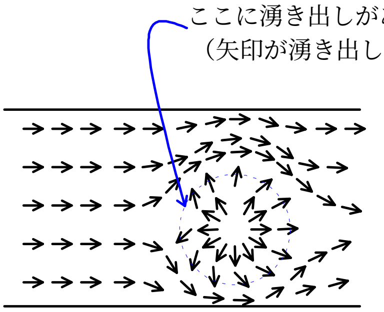


図1-33 gradとdiv

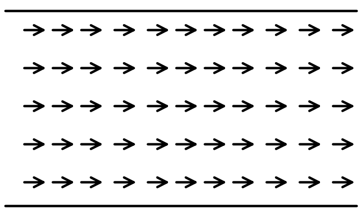
いうことは、電界の傾きを表すのだな。」と思われるのが普通かと思います。そして「それだったらgrad**E**とでもかけばいいじゃないか。」と疑問に思われるでしょう。確かに式のうえでは電界の傾きを表しており、それをそのままとっても間違いなさそうなのですが、divの元々の意味を考えに入れておかないとgradとdivが同じようなものととってしまう危険性があります。grad、divのそれぞれの意味は "grad:傾き" "div:発散" で意味のとらえ方は全然違いますし、gradの後にくるものはポテンシャル、divの後にくるものはベクトルと、そんなところにも違いがあったりします。それではdivの意味を説明してゆきます。

そもそも電位と電界の強さというのは違うのです。電位勾配が大きければ電界が強く、小さければ弱いというのがgradVの意味するところです。そして電界Eはポテンシャルのような大きさのみではなく、方向を持つベクトルなのです。

図1-33を見てください。divとgradを図的に表したものです。分かりやすくするため 2次元で考えます。gradはその点において微小距離*ds*をとりその*ds*により電位がどの程度変化したかを、ｘｙ方向に分けて表したものでした。ところがdivは微小な円周をとり、その円に対し電気力線がどの程度で出入りしているのかを表しているのです。このことを、ベクトル界で考えてみます。ベクトル界として、図1-34に示すように河の流れを使ってみます。水の流れはこの図のようにベクトルを使って表すことができます。河の途中でわき水があると、これはベクトルにすれば "ベクトルが沸いてでた" ことになり、この沸きだし口においてdivはある値を持つことになるのです。また、わき水がなければベクトルの沸き出しもありませんからdivは 0 となります。このようにある(ｘ,y, ｚ)におけるdivをとれば、その点においてベクトルが沸き出しているかどうかを知ることができるのです。では、電界においてこのdivはどういうふうに使われるのかを見てみることにします。図1-35(a)を見てください。円周を、電荷を囲むようにとった場合です。このとき全ての円周上において電気力線はでていく方向ですのでdiv**E**は何かしらの値を持ちます。次に(b)を見てみましょう。こ



（ａ）沸きだしがある場合



（ｂ）沸きだしがない場合

川の流れをベクトルで表したとき、涌き水が発生しているところが、ベクトルの湧き出しに相当する。

図1-34　ベクトルの沸きだしとは

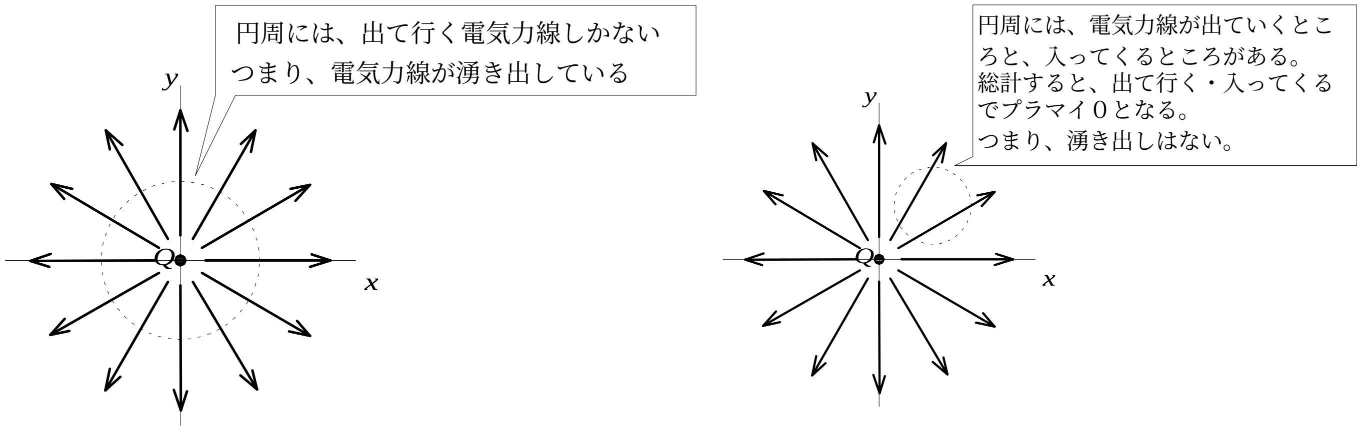


図1-35　場所による沸きだしベクトルの有無

の図では円周の場所場所によって電気力線が入るところと出るところがあります。例えばば円周の微小部分 ds_1 は電気力線が入ってきますし、ds_2 は電気力線が出ていっております。さて、電気力線は電界Ｅを表すベクトルみたいなものです。言い替えればＥというベクトル界を、ひとつひとつのベクトルをひとつの連続した曲線にし、大きさを矢印の密度として一気に表したものですから、電界Ｅのベクトル分布と思ってよいでしょう。こう考えますと、(b)は円周全体においてベクトルの出入りは "出ていく、入ってくる" でプラスマイナス 0、すなわちマクロに見て、ベクトルの出入りは無しと考えられます。(a)ではベクトルは出ていく方向のみあるといえます。つまり、(a)では円周からベクトルがどんどん出ていくわけですから "沸きだしありベクトル" そして(b)では "沸きだしなしベクトル" といいます。式でいうと、

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = a \qquad （図(a)） \qquad (1\text{-}84)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0 \qquad （図(b)） \qquad (1\text{-}85)$$

となります。ところで式(1-48)でお目見えした微分演算子∇を導入いたしますと、

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \nabla \bullet \mathbf{E} \qquad (1\text{-}86)$$

と表示することができます。これは

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z) = \nabla \bullet \mathbf{E}$$

注) $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)(\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z)$

$$= (\mathbf{i}A_xB_x + \mathbf{j}A_yB_y + \mathbf{k}A_zB_z)$$

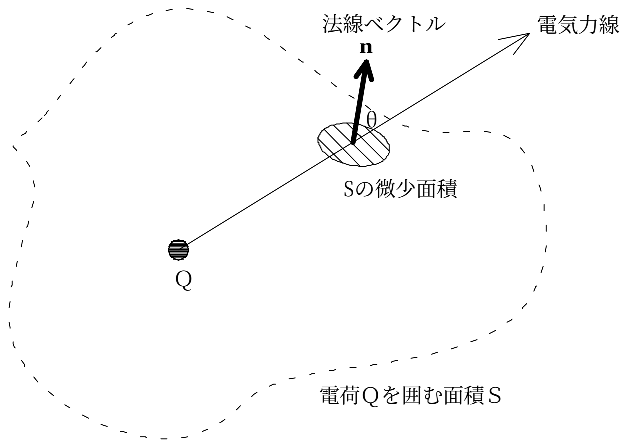
という導きよりも明らかです。以上が　$\mathrm{div}\mathbf{E}$ の意味です。これで div が発散といわれている意味が分かったのではないでしょうか。実際は空間で考えますので、以上の説明なら円周は球の表面積となります。そして微小円周 ds は微小面積 dS に置き換えて全く同様の説明がつきます。

div の意味がわかったところで、数学的な div の定義を説明します(でもベクトルとしては電界 **E** を使う。そのほうが一般的なベクトルＡを使うよりイメージがつかみやすいと思いますので)。

ベクトル界(この場合は電界) **E** の一点において、

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta S} \mathbf{E} \bullet \mathbf{n} dS \qquad (1\text{-}87)$$

と表されるスカラ量をベクトルの発散といいます。**n** は微小面積 dS の方線方向の単位ベクトルです。つまり、**E**・**n** は面積 dS の方向に合わせていることです(このあたり、どっかで見たような・・・と思う人は偉い！



Ｓ全体から出ていく電気力線の総数

$$N = \int_S \mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\, dS$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta S} \mathbf{E} \bullet \mathbf{n} dS$$

図1-34　ガウスの定理から

実はちょっと前のガウスの定理でおんなじ図がでています。忘れてたら見直してみてください)。つまりdivはこの球をとてつもなく小さくしたときを考えています。これはgradにおいて微小距離を限りなく 0に近づけるというのと同じ考えです。

さて、これまで∇・**E**(＝div**E**)について説明してまいりましたが、**E**というのはgradを用いまして、

$$\mathbf{E}=-\mathrm{grad}V$$

と表すことができました。ということは

$$\mathrm{div}\mathbf{E}=\nabla\bullet\mathbf{E}=\nabla\bullet\mathrm{grad}V=\nabla\bullet\nabla V=\nabla^2 V \quad (1\text{-}88)$$

と表すことができます。∇^2をラプラシアン(ラプラス演算子)といい∇と∇の形式的なスカラ量で表されます。

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial_2}{\partial z^2} \quad (1\text{-}89)$$

つぎにポアソンの方程式というのを述べましょう。
ガウスの定理を今一度持ってきて

$$\int_S \mathbf{E}\bullet d\mathbf{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\ \ dV \quad (1\text{-}90)$$

この式より

$$\int_S \mathbf{E}\bullet d\mathbf{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\,\Delta V \quad (1\text{-}91)$$

さらに変形して

$$\frac{1}{\Delta V}\int_S \mathbf{E}\bullet d\mathbf{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad (1\text{-}92)$$

となると左辺は単位体積あたり出ていく電気力線数の数です。したがって

$$\mathrm{div}\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad (1\text{-}93)$$

となります。またここでgradと対応づけると

$$\mathbf{E}=-\mathrm{grad}V \quad (=-\nabla V\ ) \quad (1\text{-}94)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\rho=\mathrm{div}\mathbf{E} \quad (=\nabla\bullet\mathbf{E}\ ) \quad (1\text{-}95)$$

この二式より

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\rho=\mathrm{div}\mathbf{E}=\nabla\bullet\mathbf{E}=\nabla\bullet(-\nabla V)=-\nabla\bullet\nabla V$$

$$\therefore \nabla\bullet\nabla V=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad (1\text{-}96)$$

なる式が出てきます。これをポアソンの方程式といいます。ポアソンの方程式により、電位Vの分布がわかりますと、これを微分して電界の強さがわかり、さらに微分して電荷の空間分布が求められるのです。

ポアソンの方程式において、空間に電荷が分布していない場合(つまり点電荷一個により作られる電界など)、式(1-96)においてρ＝0、すなわち

$$\nabla\bullet\nabla V=0 \qquad (\nabla^2 V=0) \quad (1\text{-}97)$$

となります。これをラプラスの方程式といいます。

1-7　電束

今までは真空中についてのみを考えてきました。しかしこれから真空中以外のことを考えますと、εが変わるたびに電気力線の本数が変わって面倒です。εによらずなにか一般的な電気力線を表す方法はないか・・・ということで、電束というものがでてきました。　いま、電荷Qより電束が放射線上にでていくとして、半径rの球面上にできる電束は、

$$D=\frac{Q}{4\pi r^2} \quad (1\text{-}98)$$

となります。これからわかるように、電束の大きさは、Qをその距離を半径とした球の面積で割ったもので、単位面積あたりのQといったものです。このDは大きさだけで方向がありませんから

$$\mathbf{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1\text{-}99)$$

として、方向をくっつけます。これが、εによらない電束というものです。考えた方は、εはどうあれ、1〔C〕の電荷から1束の電束が出ているということです。

1-8　電界内に蓄えられるエネルギー

図1-37のように両電極間が電荷Q、－Qを与えられ電位差がVであったとすると仕事Wは

$$\Delta W=\Delta QV \quad (1\text{-}100)$$

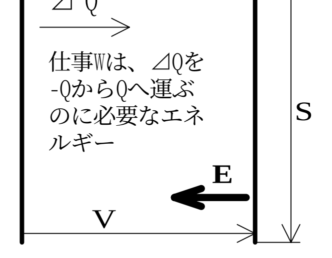


図1-37 電界内に蓄えられるエネルギー

で表わされます。仕事というのは、⊿QというのをーQからQへ運ぶための仕事と考えればよいでしょう。したがってWは⊿Wを集める計算になります。

$$W = \int_0^{Q_0} dW \qquad (1\text{-}101)$$

ここで式(1-100)の⊿W、⊿Qをそれぞれ微少ｄW、ｄQと考えれば式(1-101)は

$$W = \int_0^{Q_0} dW = \int_0^{Q_0} \frac{Q}{\varepsilon_0 S} l dQ \qquad (1\text{-}102)$$

となります。式(1-100)に

$$V = El = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l \qquad (1\text{-}103)$$

を代入して計算したのが式(1-102)です。結局式(1-102)は

$$(1-102) = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\int_0^{Q_0} QdQ = \frac{l}{2\varepsilon_0 S}\left[Q^2\right]_0^{Q_0} = \frac{1}{2}\frac{l}{\varepsilon_0 S}Q_0 = \frac{1}{2}VQ_0$$

$$(1\text{-}104)$$

となり、エネルギーが求まります。では次に単位体積あたりのエネルギーを求めてみましょう。単位体積あたりのエネルギーをωとし、電極間距離をｌ、両板面積をＳとすれば

$$\omega = \frac{W}{Sl} \qquad (1\text{-}105)$$

となります。ωをエネルギー密度ともいいます。式(1-105)を変形していきますと

$$\omega = \frac{W}{Sl} = \frac{1}{2}\frac{V_0 Q_0}{Sl} = \frac{1}{2}\frac{V_0}{l}\frac{Q_0}{S} = \frac{1}{2}ED \qquad (1\text{-}106)$$

したがって

$$\omega = \frac{1}{2}ED \qquad (1\text{-}107)$$

といった式がでてきました。電界によって、エネル

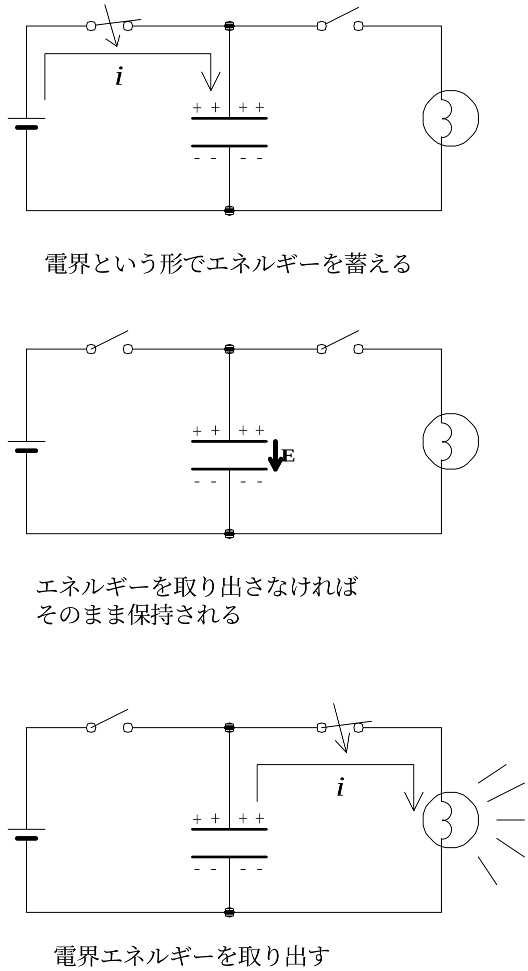


図 1-38　コンデンサに蓄えられるエネルギー

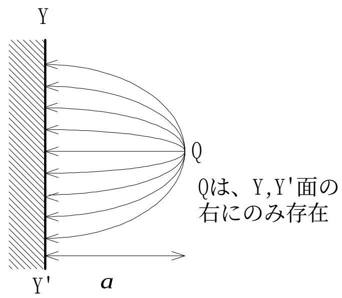


図 1-39　無限平面と点電荷

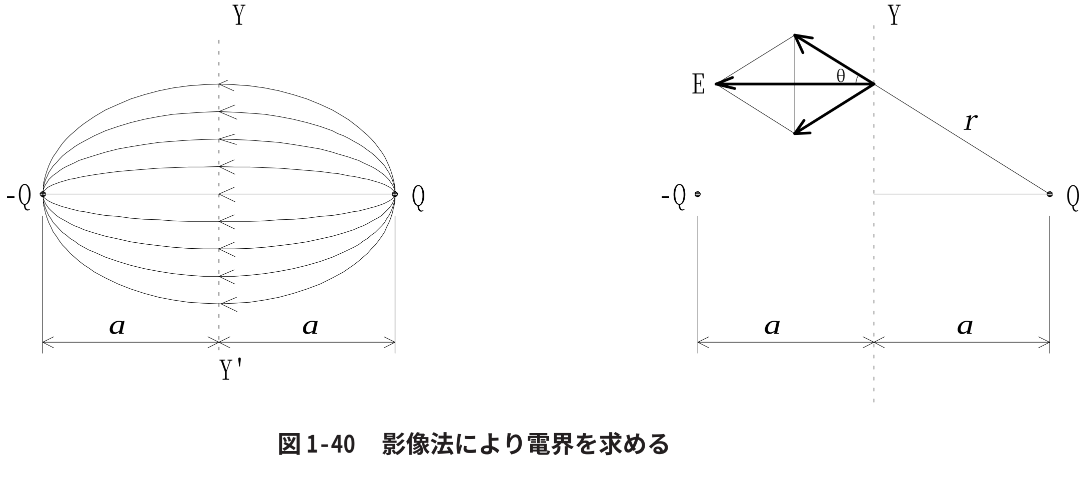


図 1-40　影像法により電界を求める

ギーを蓄えることができることは、コンデンサを例にするとわかりやすいでしょう。

1-9　影像法

　ここでは影像法というものを説明いたします。影像法とは何かを最初に述べますが、簡単に言えば、電荷のそばに導体があった場合に、ある操作をすればその導体をとっぱらうことができるというものです。かなり後の話になりますが、接地アンテナが半分の長さで良いという理由(イメージアンテナ)がここにあります。

さて、いままで電位や電界を計算するのに、空間内には電荷のみ、もしくは帯電した導体のみが存在した場合を考えてまいりました。これからは、空間に電荷と導体が混在する場合の電位や電界を計算してゆきます。そこに影像法が使われるのです。

　導体系における電界を求めるには、ラプラス、またはポアソンの方程式を、与えられた境界条件のもとに解くこちにより求められます。その境界条件とは、

①　Y-Y' 面上の電界はY-Y' 面に垂直である。
②　Y-Y' より右(または左)に点電荷Qのみが存在する。

　さて、境界条件を満足する方程式の解は必ず存在し、唯一ひとつだけです　(解の一義性)。なお、この方法は必ずしも容易ではありません。境界条件を乱さないようにして、既知のものに直し解を得る。これが影像法の考えです。

　図1-39のように無限に広い導体Y－Y' よりaだけ離れたところに点電荷Qがあるときのことを考えてみましょう。

　境界条件を乱さないようにして既知のものに直しますと、図1-40のようになります。これは、Qと反対の電荷$-Q$を、導体を取り外しY－Y'　よりQと逆方向にaだけ話した場所においたものです。この$-Q$を影像電荷といいます。

　では、図1-39においてY－Y' 上の中心よりy離れた場所の電界を求めてみましょう。

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\times 2$$

ここで

$$\cos\theta=\frac{a}{r}$$

より

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{a}{r}\times 2=\frac{2aQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (1\text{-}108)$$

　さてY-Y' より右の電界は、この式で表現できますが、Y－Y'　より左については同じようにしては求めることはできません。左の電界については不明である

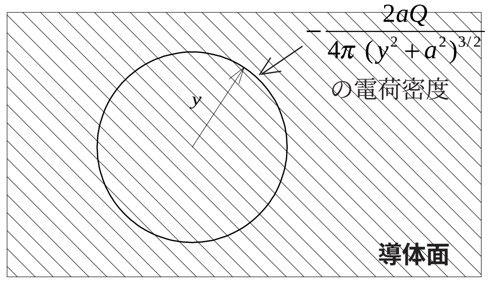


図1-41 平面導体に誘起する電荷

ことに注意して下さい。

　次にQに働く力を計算してみましょう。おなじように導体板Y－Y'　をとっぱらって、反対側に－Qのイメージをおいて考えればよく

$$F=\frac{Q(-Q)}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2} \qquad (1\text{-}109)$$

この負号は吸引力を表わしております。このFによって導体とQとの間に力が働くのです。

　さて図1-39のように配置されたとき、導体板上に電荷が誘導されます。その密度を求めますと

$$E=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1\text{-}110)$$

となります。ここで更に式(1-121)　より

$$E=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\frac{2aQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\therefore \rho=-\frac{2aQ}{4\pi\ r^3}=-\frac{2aQ}{4\pi\ (y^2+a^2)^{3/2}} \qquad (1\text{-}111)$$

この式より、同じyのところに同じ電荷密度、すなわち電荷密度の同心円ができます。

　こうして、導体板と点電荷の場合により影像法をもちいて電界などを求めてみました。影像法をもちいることにより、導体を取り除くことができ、それにより各計算を行なうことができるということがわかったのではないでしょうか。

2004年11月
S.watabe(JE1AMO)